UNE INTERPOLATION DE PLUSIEURS NOMBRES CLASSIQUES ET FRACTIONS CONTINUES

Par

Arthur RANDRIANARIVONY et Jiang ZENG

Abstract. — We introduce a polynomial sequence interpolating the Euler numbers, Genocchi numbers, Eulerian numbers and the recent median Euler numbers. We show that the ordinary generating function of this sequence has a nice simple continued fraction expansion and also a combinatorial interpretation. Finally we show also some connections of these polynomials with Springer numbers.

1. Introduction

Le présent travail prend sa source dans l'article original de GANDHI [Ga] qui, dans les années soisante-dix, avait conjecturé une expression pour les *nombres de Genocchi* $(G_{2n})\,(n \geq 1)$ comme spécialisation des polynômes à coefficients entiers $(K_n(x))\,(n \geq 1)$ définis par l'équation aux différences finies

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} K_1(x) = x^2, \\ K_n(x) = x^2(K_{n-1}(x+1) - K_{n-1}(x)) \qquad (n \geq 2). \end{cases}$$

La conjecture, qui s'exprimat par $K_n(1) = G_{2n+2}\,(n \geq 1)$ et qui fut immédiatement démontré par RIORDAN et STEIN [Ri-St], d'une part, et CARLITZ [Ca], d'autre part, a été la source de l'étude algébrique et combinatoire des nombres de Genocchi. On doit à DUMONT [Du1] les premieux travaux sur cette étude combinatoire. Celle-ci a permis d'introduire de nouveaux objets géométriques, comme les *escaliers* (voir la définition ci-après) qui se sont avérés être fondamentaux à la fois pour les études combinatoires de cette suite de nombres et de leurs dérivés (*cf.* [Du-Fo, Vi, Ha, Du-Ra]), et pour le calcul alébrique de plusieurs polynômes qui leur sont attachés. En particulier, le modèle combinatoire a inspiré directement l'expression analytique du *développement en fraction continue* des fonctions génératrices de ces nombres, des polynômes $K_n(x)$ et de plusieurs autres familles de polynômes attachés à des suites classiques de nombres.

Le but de cet article est de proposer une *globalisation* des résultats obtenus en introduisant une nouvelle suite de polynômes à plusieurs variables $(P_n(x, y, \bar{x}, \bar{y}))\,(n \geq 0)$, et en montrant que leur étude algébrique et combinatoire couvre tous les résultats récents sur les *nombres de Genocchi* et leurs polynômes dérivés $B_n(x, y)$, les polynômes Eulériens $A_n(x, y)$, les polynômes $C_n(x, y)$ attachés aux nombres d'Euler E_n, les polynômes $D_n(x)$ et $S_n(x)$ associés aux nombres de Springer. Ces polynômes $P_n(x,y,\bar{x},\bar{y})\,(n\geq 0)$ sont définis par la récurrence :

$$
\text{(1.2)}\qquad
\begin{cases}
P_0(x,y,\bar{x},\bar{y})=1,\\
P_n(x,y,\bar{x},\bar{y}) = x(\bar{x}+\bar{y})P_{n-1}(x+1,y,\bar{x}+1,\bar{y})\\
\qquad\qquad\qquad\qquad -x(\bar{x}+\bar{y}-y)P_{n-1}(x,y,\bar{x},\bar{y}).
\end{cases}
$$

Comparant (1.2) à (1.1) on pourra constater que la seconde récurrence s'inspire directement de la première et en effet $K_n(x) = xP_n(x,1,x,1)\,(n\geq 1)$. D'un point de vue analytique les polynômes précédents s'expriment dans l'algèbre des polynômes P_n comme :

$$
\text{(1.3)}\qquad
\begin{aligned}
A_n(x,y) &= \text{la somme des termes du plus haut degré de } yP_n(x,1,y,1),\\
B_n(x,y) &= x^{-1}P_n(x,1,y,1),\\
C_n(x,y) &= 2^{2n}P_n(x/2,1/2,y/2,1/2),\\
D_n(x) &= 2^{2n}P_n((x+1)/2,1/2,(x+1)/2,1/2),
\end{aligned}
$$

quant à la suite des polynômes $S_n(x)$, elle apparait comme la suite initiale de la matrice de Seidel lorsqu'on prend $(2^{2n}D_n(x))$ comme suite finale.

A partir de la relation (1.2) on peut aisément obtenir une expression pour la fonction génératrice ordinaire des polynômes P_n (voir paragraphe 2), puis à l'aide d'un lemme de Wall [Wa] calculer explicitement le développement en fraction continue de cette fonction génératrice (voir Théorème 3).

Par ailleurs, Dumont [Du3] a défini une suite de polynômes à six variables $\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})\,(n\geq 1)$ comme générateurs d'une statistique *multivariée* sur les *escaliers* d'ordre n, les escaliers sont simplement définis comme des applications surjectives f de $[2n]=\{1,2,\ldots,2n\}$ sur l'ensemble $\{2,4,6,\ldots,2n\}$ telle que pour tout $k\in[2n-2]$ on ait $f(k)\geq k$. La définition de cette statistique sera donnée au paragraphe 2. On doit à Dumont [Du3] d'avoir conjecturé que la fonction génératrice des Γ_n admettait le développement en fraction continue suivant :

$$
\text{(1.4)}\qquad \sum_{n\geq 1}\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})t^n = \cfrac{t}{1-(x\bar{y}+y\bar{z}+z\bar{x})\,t-\cfrac{(\bar{x}+y)(\bar{y}+z)(\bar{z}+x)\,t^2}{\ddots}}
$$

où les coefficients sous le (n+1)-ième trait de fraction est

$$
1-[(x+n)(\bar{y}+n)+(y+n)(\bar{z}+n)+(z+n)(\bar{x}+n)-n(n+1)]t
-\cfrac{(n+1)(\bar{x}+y+n)(\bar{y}+z+n)(\bar{z}+x+n)t^2}{\ddots}
$$

un résultat qui a été prouvé par Randrianarivony [Ra] et Zeng [Ze] par deux méthodes différentes.

Nous établissons ici les relations

$$\begin{aligned} P_n(x,y,\bar{x},\bar{y}) &= \Gamma_{n+1}(\bar{x},0,y,x,0,\bar{y}) \\ &= xy\Gamma_n(\bar{x},1,y,x,1,\bar{y}) \\ &= xy\Gamma_n(x,\bar{y},1,\bar{x},y,1). \end{aligned}$$

Ce qui à l'aide de la conjecture (prouvée) de Dumont permet de fournir une *interprétation combinatoire* des polynômes P_n en termes d'escaliers. Tous ces résultats sont consignés dans le paragraphe 2.

Le reste de l'article est consacré à l'étude des diverses spécialisations des polynômes P_n. Dans l'étude des polynômes Euleriens (paragraphe 3), nous obtenons de *nouvelles interprétations combinatoires* pour ces polynômes d'abord en termes d'escaliers (*cf.* Propositions 9 et 11), ensuite en termes d'application *injectives* (*cf.* Proposition 10). Nous redémontrons ensuite un résultat de Dumont [Du2] sur l'interprétation des polynômes $A_n(x,y)$ en termes de générateurs d'*involutions bipartites*, en construisant une bijection entre ces derniers models et les escaliers (*cf.* Proposition 12).

Dans le paragraphe 4 nous retrouvons les résultats de Dumont-Randrianarivony [Du-Ra] sur les polynômes $B_n(x,y)$ et établissons deux autres interprétations combinatoires. Quant aux polynômes $C_n(x,y)$ dont le développemnt en fraction continue dans [Ra-Ze], ils reçoivent ici une nouvelle interprétation combinatoire dans le model des escaliers (*cf.* Propositions 16 et 17).

Après avoir exposé quelques préliminaires sur les *matrices des Seidel* au paragraphe 5, nous montrons, au paragraphe 6, que les polynômes $D_n(x)$ ont eux-mêmes deux spécialisations déjà introduites par Dumont [Du4] :

$$L_n = D_n(-1/2), \qquad R_n = D_n(1/2),$$

appelés nombres d'*Euler médians*. Nous en proposons deux autres

$$l_n = 2^{-n}D_n(0), \qquad r_n = 2^{-n}D_n(1),$$

dont les fonctions génératrices admettent des développements en fractions continues *trop* régulières pour ne pas receler des propriétés algébriques ou combinatoires intéressantes (*cf.* Proposition 28).

Dans le paragraphe 7 nous retrouvons une *extension (nouvelle) polynômiale* des *nombres de Springer* S_n ($n \geq 1$) en considérant une matrice de Seidel dont la suite *finale* est la suite $(2^{2n}D_n(x))$. Nous montrons alors que la suite la suite *initiale* $(S_n(x)$ de cette matrice satisfont

$$S_{2n} = S_n(-1/2), \qquad S_{2n+1} = S_n(1/2).$$

Nous déduisons ensuite de cette construction une interprétation des polynômes $S_n(x)$, donc aussi des nombres de Springer S_n.

2. Etudes des polynômes $P_n(x,y,\bar{x},\bar{y})$

Remarquons d'abord que $P_n(x,y,\bar{x},\bar{y})$ est un polynôme en x, y et $\bar{x}+\bar{y}$. En effet, si on remplace $\bar{x}$ par $\bar{x}+t$ et $\bar{y}$ par $\bar{y}-t$ dans (1.1), nous avons toujours la même récurrence. Donc pour tout t,

$$P_n(x,y,\bar{x},\bar{y}) = P_n(x,y,\bar{x}+t,\bar{y}-t). \tag{2.1}$$

En particulier, nous avons $P_n(x,y,\bar{x},\bar{y}) = P_n(x,y,\bar{x}+\bar{y},0)$. Par conséquent, posant $Q_n(x,y,z) = P_n(x,y,z,0)$, les polynômes $P_n(x,y,\bar{x},\bar{y}) = Q_n(x,y,\bar{x}+\bar{y})$ peuvent aussi se caractériser par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} Q_0(x,y,z)=1, \\ Q_n(x,y,z)=xzQ_{n-1}(x+1,y,z+1)-x(z-y)Q_{n-1}(x,y,z). \end{cases} \tag{2.2}$$

Posons

$$(x)_0 = 1 \qquad \textit{et} \qquad (x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1) \qquad \textit{pour} \qquad n\geq 1.$$

PROPOSITION 1. — *Nous avons*

$$\sum_{n\geq 0} P_n(x,y,\bar{x},\bar{y})t^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(x)_n(\bar{x}+\bar{y})_n t^n}{\prod_{k=0}^n [1+(x+k)(\bar{x}+\bar{y}-y+k)t]}. \tag{2.3}$$

Démonstration : Soit $P(x,y,\bar{x},\bar{y};t) = \sum_{n\geq 0} P_n(x,y,\bar{x},\bar{y})t^n$ la série génératrice ordinaire des $P_n(x,y,\bar{x},\bar{y})$. On déduit de la relation de récurrence (1.2) que

$$(1+x(\bar{x}+\bar{y}-y)t)P(x,y,\bar{x},\bar{y};t) = 1 + x(\bar{x}+\bar{y})tP(x+1,y,\bar{x}+1,\bar{y};t). \tag{2.4}$$

Par suite,

$$P(x,y,\bar{x},\bar{y};t) = \frac{1}{1+x(\bar{x}+\bar{y}-y)t} + \frac{(x+1)(\bar{x}+\bar{y})t}{1+x(\bar{x}+\bar{y}-y)t}P(x+1,y,\bar{x}+1,\bar{y};t)$$

et par itération on obtient la formule. □

PROPOSITION 2. — *Les polynômes* $P_n(x,y,\bar{x},\bar{y})$ $(n\geq 0)$ *ont l'expression explicite suivante :*

$$P_n(x,y,\bar{x},\bar{y}) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} \frac{(-1)^{n-k}(x+\bar{x}+\bar{y}-y+2k)(x)_n(\bar{x}+\bar{y})_n}{k!(j-k)!(x+\bar{x}+\bar{y}-y+k)_{j+1}} \times (x+k)^n(x+\bar{x}+\bar{y}-y+k)^n.$$

Démonstration : Décomposant la fraction rationnelle dans le second membre de (2.3) en éléments simples, nous obtenons

$$\frac{t^j}{\prod_{k=0}^{j}[1+(x+k)(\bar{x}+\bar{y}-y+k)t]} = \sum_{l=0}^{j} \frac{\alpha_l(j)}{1+(x+l)(\bar{x}+\bar{y}-y+l)t},$$

où la valeur de $\alpha_l(j)$ est donnée par

$$\alpha_l(j) = \frac{(-1)^l(x+\bar{x}+\bar{y}-y+2l)}{l!(j-l)!(x+\bar{x}+\bar{y}-y+l)_{j+1}} \qquad (j \geq l \geq 0)\cdot$$

Par conséquent, le polynôme $P_n(x,y,\bar{x},\bar{y})$ est le coefficient de t^n dans le développement de

$$\sum_{j=0}^{n}(x)_n(\bar{x}+\bar{y})_n \sum_{l=0}^{j} \frac{\alpha_l(j)}{1+(x+l)(\bar{x}+\bar{y}-y+l)t}.$$

D'où l'on tire la formule explicite. □

Enfin, appliquant un lemme de Wall [Wa] à l'équation (2.4), nous obtenons (*cf.* [Ze, Ra-Ze]) le développement en fraction continue de la série génératrice ordinaire des polynômes $P_n(x,y,\bar{x},\bar{y})$.

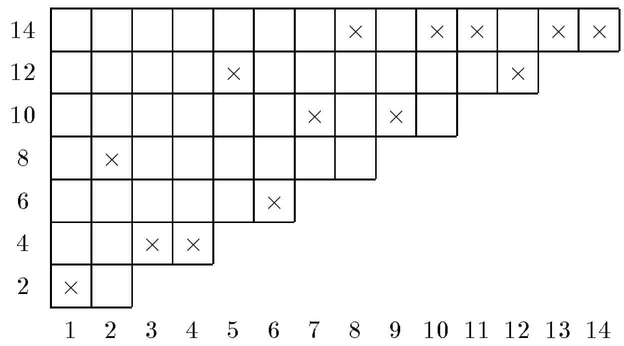
Théorème 3. — *Nous avons*

$$\sum_{n\geq 0} P_n(x,y,\bar{x},\bar{y})t^n = \cfrac{1}{1-\cfrac{xyt}{1-\cfrac{1(\bar{x}+\bar{y})t}{1-\cfrac{(x+1)(y+1)t}{1-\cfrac{2(\bar{x}+\bar{y}+1)t}{1-\cfrac{(x+2)(y+2)t}{1-\cfrac{3(\bar{x}+\bar{y}+2)t}{\ddots}}}}}}}.$$

Pour donner une interprétation combinatoire de ces polynômes, nous avons besoin d'introduire quelques notions combinatoires classiques. Rappelons qu'un *escalier* F sur $[2n] := \{1,2,\ldots,2n\}$ est le graphe d'une application *surjective* f de $[2n]$ sur $\{2,4,6,\ldots,2n\}$ telle que pour tout $k \in [2n]$, $f(k) \geq k$. Un point $(k, f(k))$ de F est dit *maximal* si $f(k) = 2n$, est dit *point fixe* s'il n'est pas maximal et si $f(k) = k$ (ce qui implique que k est pair), est dit *surfixe* s'il n'est pas maximal et si $f(k) = k+1$ (ce qui implique que k est impair). On note $\max F$ le nombre des points maximaux de F à l'exception des points $(2n-1, 2n)$ et $(2n, 2n)$, fix F (*resp.* sur F) le nombre de ses points fixes (*resp.* surfixes). Soit $\mathcal{E}_{2n}$(*resp.* $\mathcal{E}^*_{2n}$) l'ensemble des escaliers (resp. sans *point fixe*) sur $[2n]$. Il est bien connu (voir [Du1, Du-Fo, Ha, Vi]) que le cardinal de $\mathcal{E}_{2n}$ est égal au nombre de Genocchi G_{2n+2}.

Etant donné un escalier F sur $[2n]$, un point $(k, f(k))$ de F est dit *doublé* s'il n'est pas seul sur sa ligne, c'est-à-dire s'il existe $j \neq k$ tel que $f(j) = f(k)$. Nous notons respectivement $\operatorname{mp} F$ et $\operatorname{mi} F$ le nombre de ses points *maximaux d'abcisses paires* $\neq 2n$ et celui de ses points *maximaux d'abscisses impaires* $\neq 2n-1$, on note $\operatorname{fd} F$ (resp. $\operatorname{fnd} F$) le nombre de ses points *fixes doublés* (resp. *non doublés*), enfin on note $\operatorname{sd} F$ (resp. $\operatorname{snd} F$) le nombre de ses points *surfixes doublés* (resp. *non doublés*).

Par exemple, dans l'escalier F de taille 14 suivant :



les six statistiques sont respectivement les suivantes :

$$\operatorname{mi} F = 1, \quad \operatorname{mp} F = 2, \quad \operatorname{fd} F = 2, \quad \operatorname{fnd} F = 1, \quad \operatorname{sd} F = 2, \quad \operatorname{snd} F = 1.$$

Dans [Du3], Dumont a introduit les polynômes générateurs de $\mathcal{E}_{2n}$ suivants :

$$\Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_{F \in \mathcal{E}_{2n}} x^{\operatorname{mi} F} y^{\operatorname{fd} F} z^{\operatorname{snd} F} \bar{x}^{\operatorname{mp} F} \bar{y}^{\operatorname{fnd} F} \bar{z}^{\operatorname{sd} F} \tag{2.5}$$

et a conjecturé le développement en fraction continue de leur série génératrice ordinaire (*cf.* (1.4)). Au cours de la démonstration de cette conjecture (*cf.* [Ra], [Ze]), nous avons établi la relation suivante :

$$\begin{cases} \Gamma_1(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 1, \\ \Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (x+\bar{z})(y+\bar{x})\Gamma_{n-1}(x+1, y, z, \bar{x}+1, \bar{y}, \bar{z}) \\ \qquad\qquad +[x(\bar{y}-y) - \bar{x}(\bar{z}-z) - x\bar{x}]\Gamma_{n-1}(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \end{cases} \tag{2.6}$$

Proposition 4. — *Pour tout $n \geq 1$, nous avons*

$$\Gamma_n(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}, x, z, y) = \Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \tag{i}$$

$$\Gamma_{n+1}(x, 0, z, \bar{x}, 0, \bar{z}) = \bar{x}z\Gamma_n(\bar{x}, \bar{z}, 1, x, z, 1). \tag{ii}$$

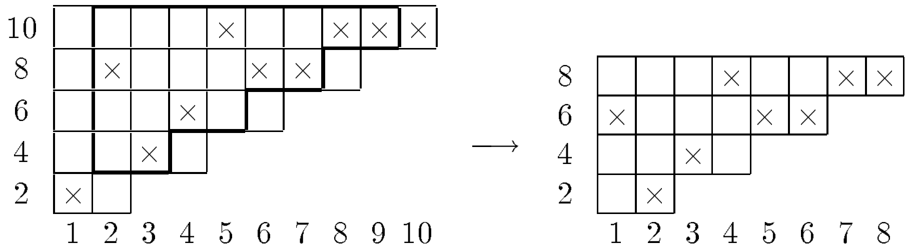
Démonstration : C'est une conséquence immédiate de (2.6). Nous donnons dans la suite une preuve directe à partir de (2.5).

(i) Soit l'application ψ de $\mathcal{E}_{2n}$ dans $\mathcal{E}_{2n}$, qui à $F = \{(k, f(k))\}$ associe $G = \{(k, g(k))\}$ telle que pour tout $k \in [n]$, $g(2k) = f(2k-1)$ et $g(2k-1) = f(2k)$. Il est clair que ψ est une involution de $\mathcal{E}_{2n}$ et satisfait

$$\operatorname{mp} G = \operatorname{mi} F,\ \operatorname{mi} G = \operatorname{mp} F,\ \operatorname{fd} G = \operatorname{sd} F,\ \operatorname{fnd} G = \operatorname{snd} F.$$

D'où l'identité (i) d'après la définition (2.5).

(ii) Soit F un escalier sans point fixe sur $\mathcal{E}_{2n+2}$. Nous supprimons la ligne et la colonne de son point surfixe $(1,2)$ qui, en dehors de ce point, sont vides, nous supprimons de même les cases vides $(2,2), (4,4), \ldots, (2n, 2n)$ ainsi que la case $(2n+2, 2n+2)$. Après renumérotage des lignes et colonnes, la trace de F sur les cases restantes constitue un escalier G sur $[2n]$, comme le montre la figure ci-après.



Nous vérifions sans peine que l'application $F \to G$ ainsi définie établit une bijection entre $\mathcal{E}^*_{2n+2}$ et $\mathcal{E}_{2n}$ telle que

$$\operatorname{mi} G = \operatorname{mp} F - 1, \qquad \operatorname{mp} G = \operatorname{mi} F, \qquad \operatorname{fnd} G = \operatorname{snd} F - 1, \qquad \operatorname{fd} G = \operatorname{sd} F.$$

D'où l'identité (ii). □

En comparant les deux relations de récurrence (1.1) et (2.6) et en vertu de la Proposition 6, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 5. — *On a*

$$\begin{aligned} P_n(x, y, \bar{x}, \bar{y}) &= \Gamma_{n+1}(\bar{x}, 0, y, x, 0, \bar{y}) \\ &= xy\Gamma_n(\bar{x}, 1, y, x, 1, \bar{y}) \\ &= xy\Gamma_n(x, \bar{y}, 1, \bar{x}, y, 1). \end{aligned}$$

Par suite, nous déduisons du Corollaire 5 et de (2.5) les interprétations combinatoires suivantes pour les polynômes $P_n(x, y, \bar{x}, \bar{y})$.

Théorème 6. — *Nous avons*

$$\begin{aligned} P_n(x,y,\bar{x},\bar{y}) &= \sum_{F\in\mathcal{E}^*_{2n+2}} x^{\mathrm{mp}\,F}\bar{x}^{\mathrm{mi}\,F}y^{\mathrm{snd}\,F}\bar{y}^{\mathrm{sd}\,F}\\ &= \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n}} x^{\mathrm{mp}\,F+1}\bar{x}^{\mathrm{mi}\,F}y^{\mathrm{snd}\,F+1}\bar{y}^{\mathrm{sd}\,F}\\ &= \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n}} x^{\mathrm{mi}\,F+1}\bar{x}^{\mathrm{mp}\,F}y^{\mathrm{fnd}\,F+1}\bar{y}^{\mathrm{fd}\,F}. \end{aligned}$$

Les premières valeurs de ces polynômes sont

$P_0(x,y,\bar{x},\bar{y}) = 1,$

$P_1(x,y,\bar{x},\bar{y}) = xy,$

$P_2(x,y,\bar{x},\bar{y}) = xy(xy+\bar{x}+\bar{y}),$

$P_3(x,y,\bar{x},\bar{y}) = xy[x^2y^2+3xy(\bar{x}+\bar{y})+(\bar{x}+\bar{y})^2+x(\bar{x}+\bar{y})+y(\bar{x}+\bar{y})+\bar{x}+\bar{y}].$

3. Polynômes Eulériens

Pour tout polynôme $P(x,y)$ en les variables x et y, notons $\Omega(P(x,y))$ la somme des termes du plus haut degré de $P(x,y)$. Posons

$$A_n(x,y) = \Omega(yP_n(x,1,y,1)) = \Omega(yP_n(1,x,1,y)), \quad (n\geq 1). \tag{3.1}$$

La deuxième égalité provient du fait que d'après le Théorème 3, les $P_n(x,\bar{x},y,\bar{y})$ sont symétriques en x et y d'une part, et en $\bar{x}$ et $\bar{y}$ d'autre part.

Proposition 7. — *Les polynômes $A_n(x,y)$ sont eulériens, i.e, satisfont la relation de récurrence :*

$$\begin{cases} A_1(x,y)=xy,\\ A_n(x,y)=xy(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y})A_{n-1}(x,y). \end{cases} \tag{3.2}$$

Démonstration : Remarquons d'abord que si l, m sont deux entiers positifs , alors

$$\Omega\left[(x+1)^l(y+1)^m-(x)^l(y)^m\right] = lx^{l-1}y^m+mx^ly^{m-1} = (\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y})x^ly^m.$$

Par conséquent,

$$\Omega\left[(y+1)P_n(x+1,1,y+1,1)-yP_n(x,1,y,1)\right] = (\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y})A_n(x,y).$$

Or, d'après (1.2), nous avons

$$\Omega(yP_n(x,1,y,1)) = xy\Omega\left[(y+1)P_{n-1}(x+1,1,y+1,1)-yP_{n-1}(x,1,y,1)\right].$$

D'où la récurrence (3.2). □

Nous désuisons aisément du Théorème 3 le résultat suivant de Dumont [Du3].

PROPOSITION 8. — *La série génératrice ordinaire des polynômes $A_n(x,y)$ admet le développement en fraction continue suivant :*

$$y + \sum_{n\geq 1} A_n(x,y)t^n = \cfrac{y}{1 - \cfrac{1xt}{1 - \cfrac{1yt}{1 - \cfrac{2xt}{1 - \cfrac{2yt}{1 - \cfrac{3xt}{1 - \cfrac{3yt}{\ddots}}}}}}}.$$

Démonstration : Le polynôme $P_n(x,1,y,1)$ étant de degré n en x et y, donc $Q_n(x,y,a) = a^n y P_n(x/a, 1, y/a, 1)$ est un polynôme en x, y et a, et satisfait $Q_n(x,y,0) = \Omega(yP_n(x,1,y,1))$. D'où la formule d'après (3.1) et le Théorème 3. $\square$

A leur tour on déduit du Théorème 6 les interprétations combinatoires suivantes, qui mettent en évidence la symétrie en x, y de $A_n(x,y)$.

COROLLAIRE 9. — *Nous avons*

$$\begin{aligned} A_n(x,y) &= \sum_{\substack{F\in\mathcal{E}_{2n}\\ \max F = n-1}} x^{\mathrm{mp}\,F+1} y^{\mathrm{mi}\,F+1} = \sum_{\substack{F\in\mathcal{E}_{2n}\\ \max F = n-1}} x^{\mathrm{mi}\,F+1} y^{\mathrm{mp}\,F+1} \\ &= \sum_{\substack{F\in\mathcal{E}_{2n}\\ \mathrm{fix}\,F = n-1}} x^{\mathrm{fnd}\,F+1} y^{\mathrm{fd}\,F+1} = \sum_{\substack{F\in\mathcal{E}_{2n}\\ \mathrm{sur}\,F = n-1}} x^{\mathrm{snd}\,F+1} y^{\mathrm{sd}\,F+1} \end{aligned}$$

Soit $\mathrm{Inj}(n)$ l'ensemble des injections g de $[n]$ dans $[2n]$ telles que $g(j) \leq 2j$ pour tout $j \in [n]$. Pour $g \in \mathrm{Inj}(n)$, notons $\mathrm{pair}(g)$ (*resp.* $\mathrm{impair}(g)$) le nombre des entiers $j \in [n]$ tels que $g(j)$ soit pair (*resp.* impair).

PROPOSITION 10. — *Nous avons*

$$A_n(x,y) = \sum_{g\in\mathrm{Inj}(n-1)} x^{\mathrm{pair}(g)+1} y^{\mathrm{impair}(g)+1}.$$

Démonstration : Soit $\mathcal{E}'_{2n}$ l'ensemble des escaliers F tels que $\max F = n-1$. On va construire une bijection entre $\mathrm{Inj}(n-1)$ et $\mathcal{E}'_{2n}$. Etant donné $g \in \mathrm{Inj}(n-1)$, on définit son image $F = \{(k, f(k))\}$ de la manière suivante. Pour tout $k \in [2n]$, s'il existe $j \in [n-1]$ tel que $g(j) = k$, on définit $f(k) = 2j$, sinon on pose $f(k) = 2n$. D'une part, comme $g(j) \leq 2j$ pour tout $j \in [n-1]$, $f(k) \geq k$ pour tout $k \in [2n]$. D'autre part, il y a $pair(g)$ entiers pairs j tels que $g(j)$ pair et $impair(g)$ entiers impairs j tels que $g(j)$ impair, donc $\mathrm{mp}\,F = n - 1 - \mathrm{pair}(g) = \mathrm{impair}(g)$

et $\operatorname{mi} F = n - 1 - \text{impair}(g) = \text{pair}(g)$. On vérifie facilement que c'est bien une application bijective de $\text{Inj}(n-1)$ sur $\mathcal{E}'_{2n}$. D'où le résultat en vertu du Corollaire 9. □

Soit E_n l'ensemble des applications excédantes f de $[n]$ dans $[n]$, *i.e*, $f(k) \geq k$ pour tout $k \in [n]$. On note $\operatorname{car} f$ le cardinal de l'ensemble $f([n])$. On peut aussi interpréter $A_n(x,y)$ en terme d'applications excédantes.

PROPOSITION 11. — *Nous avons*

$$A_n(x,y) = \sum_{f \in E_n} x^{\operatorname{car} f} y^{n - \operatorname{car} f + 1}$$

Démonstration : D'après le corollaire 11,

$$A_n(x,y) = \sum_{\substack{F \in \mathcal{E}_{2n} \\ \operatorname{fix} F = n-1}} x^{\operatorname{fnd} F + 1} y^{\operatorname{fd} F + 1}.$$

Soit donc $F \in \mathcal{E}_{2n}$ tel que $\operatorname{fix} F = n-1$. Supprimons toutes les colonnes paires où seules les cases $(2,2), (4,4), \ldots, (2n, 2n)$ ne sont pas vides. La trace de F sur les cases restantes, après renumérotage des colonnes restantes et lignes par $1, 2, \ldots, n$, constitue le graphe d'une application excédante g (non necessairement surjective) de $[n]$. L'application $F \to g$ est bien une bijection de $\mathcal{E}_{2n}$ sur E_n telle qu' une ligne vide de g correspond à un point fixe non doublé de F. D'où le résultat. □

Appelons *involutions bipartites* de $[2n]$ les involutions sans point fixe de $[2n]$ dont chaque cycle est composé de deux entiers de parités différentes. Notons $Invbip(2n)$ l'ensemble de telles involutions. Soit $\sigma \in Invbip(2n)$, une valeur $x \in [2n]$ est dit *pic de cycle* de σ si $\sigma^{-1}(x) < x > \sigma(x)$. Nous notons $i(\sigma)$ (*resp.* $p(\sigma)$) le nombre de pics de cycle impairs (*resp.* pairs) de σ. DUMONT [Du2] a montré que $A_n(x,y)\,(n \geq 1)$ sont des polynômes générateurs des $Invbip(2n)$ selon leurs nombres de pics de cycle pairs et impairs, *i.e.*,

$$A_n(x,y) = \sum_{\sigma \in Invbip(2n)} x^{\mathrm{p}(\sigma)} y^{\mathrm{i}(\sigma)+1}. \tag{3.3}$$

Par abus de langage, nous identifions dans la suite un escalier et son application correspondante.

PROPOSITION 12. — *Il existe une bijection entre $\mathcal{E}'_{2n}$ et $Invbip(2n)$ telle que*

$$\begin{cases} \operatorname{mp} F + 1 = \mathrm{p}(\varphi(F)) \\ \operatorname{mi} F + 1 = \mathrm{i}(\varphi(F)) + 1. \end{cases}$$

Démonstration : Pour tout $F \in \mathcal{E}'_{2n}$, notons F_i la restriction de F à [2i] pour $i = 1, 2, \ldots, n$, c'est-à-dire, pour $1 \le k \le 2i$, $F_i(k) = \inf\{F(k), 2i\}$. Signalons tout d'abord que, pour $1 \le j < i \le n$, $2j$ n'a qu'un seul antécédent par F_i que nous notons $F_i^{-1}(2j)$. Nous allons construire successivement par récurrence la suite $(\varphi(F_i))\,(1 \le i \le n)$ de sorte que $\varphi(F_i)$ satisfait la relation suivante pour $1 \le i \le n$:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{mp}(F_i) + 1 = \mathrm{p}(\varphi(F_i)) \\ \mathrm{mi}(F_i) + 1 = \mathrm{i}(\varphi(F_i)) + 1 \end{array}\right. \tag{3.4}$$

On définit d'abord $\varphi(F_1) = (1, 2)$ et, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, si $k = F_{i+1}^{-1}(2i)$ est un pic de cycle impair (resp. pair) de $\varphi(F_i)$, alors $\varphi(F_{i+1})$ se déduit de $\varphi(F_i)$ en supprimant le cycle (k', k) et en le remplaçant par les deux cycles $(k', 2i+1)$ et $(k, 2i+2)$ (resp. $(k', 2i+2)$ et $(k, 2i+1)$); sinon on ajoute le cycle $(2i+1, 2i+2)$. Il est clair que l'application φ ainsi définie vérifie la relation (3.4). Montrons que c'est bien une bijection de $\mathcal{E}'_{2n}$ sur $Invbip(2n)$. Pour cela, soit $\sigma \in Invbip(2n)$ et, pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, σ_i sa restriction à [2i], c'est-à-dire, si $(2i+1, 2i+2)$ (resp. $(k, 2i+1)$ et $(k', 2i+2)$) est un cycle (resp. sont des cycles) de σ_{i+1}, alors σ_i se déduit de celle-ci en supprimant ce cycle (resp. en supprimant ces cycles puis en les remplaçant par (k, k')). On construit la suite d'escaliers $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ comme suit :

(i) $F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,

(ii) $F_{i+1}^{-1}(2j) = F_i^{-1}(2j)$ pour $1 \le j < i \le n-1$,

(iii) si $(k, 2i+1)$ et $(k', 2i+2)$ sont des cycles de σ_{i+1}, $F_{i+1}^{-1}(2i) = \sup\{k, k'\}$,

(iv) si $(2i+1, 2i+2)$ est un cycle de σ_{i+1}, $F_{i+1}^{-1}(2i)$ est le seul élément de $[2i]$ différent de $F_i^{-1}(2j)$ $(j = 1, 2, \ldots, i-1)$ et qui n'est pas un pic de σ_i,

(v) Pour tout $j \ne F_{i+1}^{-1}(2k)$ quel que soit $k \le i$, $F_{i+1}(j) = 2i+2$.

L'application $\sigma \to F = F_n$ ainsi définie est clairement l'inverse de φ. □

Exemple : Soit l'escalier (ou application) sur [10]

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 2 & 10 & 4 & 10 & 6 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix},$$

le déroulement de la bijection φ est décrit dans le tableau suivant :

i	F_i	$\varphi(F_i)$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$(1,2)$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$	$(1,4)(2,3)$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 6 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$	$(1,6)(2,3)(4,5)$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 8 & 4 & 8 & 6 & 8 & 8 \end{pmatrix}$	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 2 & 10 & 4 & 10 & 6 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)(9,10)$

Nous trouvons alors $\varphi(F) = (1,8)(2,3)(4,5)(6,7)(9,10)$.

4. Nombres d'Euler et de Genocchi

Posons, pour tout $n \geq 1$,

$$B_n(x,y) = x^{-1}P_n(x,1,y,1).$$

La récurrence (1.2) devient alors

$$\begin{cases} B_1(x,y)=1, \\ B_n(x,y)=(x+1)(y+1)B_{n-1}(x+1,y+1) - xyB_{n-1}(x,y). \end{cases} \tag{4.1}$$

Ces polynômes ont été étudiés par Dumont et Randrianarivony dans [Du-Ra] comme une extension commune des nombres de Genocchi et des nombres de Genocchi médians en ce sens que

$$G_{2n} = B_n(1,1), \qquad H_{2n-1} = B_n(0,1) \qquad (n \geq 1).$$

D'après le Théorème 3 nous retrouvons immédiatement le résultat suivant de [Du-Ra].

PROPOSITION 13. — *Nous avons*

$$1 + x\sum_{n\geq 1} B_n(x,y)t^n = \cfrac{1}{1-\cfrac{1xt}{1-\cfrac{1(y+1)t}{1-\cfrac{2(x+1)t}{1-\cfrac{2(y+2)t}{1-\cfrac{3(x+2)t}{1-\cfrac{3(y+3)t}{\ddots}}}}}}}.$$

D'autre part, le Théorème 6, nous retrouvons immédiatement

PROPOSITION 14. — *On a les interprétations combinatoires suivantes :*

$$\begin{aligned} B_n(x,y) &= \sum_{F\in\mathcal{E}^*_{2n+2}} x^{\mathrm{mp}\,F-1} y^{\mathrm{mi}\,F} \\ &= \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n}} x^{\mathrm{mp}\,F} y^{\mathrm{mi}\,F} = \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n}} x^{\mathrm{mi}\,F} y^{\mathrm{mp}\,F}. \end{aligned}$$

Posons, pour $n \geq 0$,

$$C_n(x,y) = 2^{2n} P_n\left(\frac{x}{2},\frac{1}{2},\frac{y}{2},\frac{1}{2}\right),$$

la relation de récurrence (1.2) se réduit alors

$$\text{(4.2)}\qquad \begin{cases} C_0(x,y)=1, \\ C_n(x,y)=x(y+1)C_{n-1}(x+2,y+2) - xyC_{n-1}(x,y). \end{cases}$$

Ces polynômes $C_n(x,y)$ ont été introduits par les deux auteurs dans [Ra-Ze] comme une extension des nombres d'Euler E_n. Nous avons démontré que

$$\text{(4.3)}\qquad C_n(1,1) = E_{2n}, \qquad C_n(2,2) = E_{2n+1}.$$

Le résultat suivant, déjà établi dans [Ra-Ze], se déduit du Théorème 4.

PROPOSITION 15. — *Nous avons*

$$\sum_{n\geq 0} C_n(x,y)t^n = \cfrac{1}{1-\cfrac{1xt}{1-\cfrac{2(y+1)t}{1-\cfrac{3(x+2)t}{1-\cfrac{4(y+3)t}{1-\cfrac{5(x+4)t}{1-\cfrac{6(y+5)t}{\ddots}}}}}}}.$$

De même on peut déduire du Théorème 6 des interprétations en termes d'escaliers de $C_n(x,y)$. Pour ce faire, on pose, pour tout escalier F sur $[2n]$,

$$\begin{aligned} \mathrm{nf}\, F &= 2n-2-\mathrm{fix}\, F, & \mathrm{ns}\, F &= 2n-2-\mathrm{sur}\, F, \\ \mathrm{nmf}\, F &= 2n-2-\max F-\mathrm{fix}\, F, & \mathrm{nms}\, F &= 2n-2-\max F-\mathrm{sur}\, F. \end{aligned}$$

PROPOSITION 16. — *On a :*

$$\begin{aligned} C_n(x,y) &= \sum_{F\in\mathcal{E}^*_{2n+2}} 2^{\mathrm{nms}\, F} x^{\mathrm{mp}\, F} y^{\mathrm{mi}\, F} \\ &= \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n}} 2^{\mathrm{nms}\, F} x^{\mathrm{mp}\, F+1} y^{\mathrm{mi}\, F} \\ &= \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n}} 2^{\mathrm{nmf}\, F} x^{\mathrm{mi}\, F+1} y^{\mathrm{mp}\, F}. \end{aligned}$$

En tenant compte de (4.3), on a :

COROLLAIRE 17. — *On a :*

$$\begin{aligned} E_{2n} &= \sum_{F\in\mathcal{E}^*_{2n+2}} 2^{\mathrm{nms}\, F} = \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n}} 2^{\mathrm{nms}\, F} = \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n}} 2^{\mathrm{nmf}\, F}, \\ E_{2n+1} &= \sum_{F\in\mathcal{E}^*_{2n+2}} 2^{\mathrm{ns}\, F-2} = \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n}} 2^{\mathrm{ns}\, F-1} = \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n}} 2^{\mathrm{nf}\, F-1}. \end{aligned}$$

Dans [Ra-Ze], nous avons donné une interprétation en termes de *records pairs* et *records impairs* de permutations alternantes sur $[2n]$ pour les polynômes $C_n(x,y)$. Le problème ouvert est de trouver une bijection entre cette interprétation et celle de la Proposition 16.

5. Matrices de Seidel

Une matrice infinie $(a_{n,k})_{n,k\geq 0}$ est dite matrice de Seidel si les coefficients satisfont la récurrence :

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + a_{n,k+1}.$$

La suite $\{a_{0,n}\}_{n\geq 0}$ (resp. $\{a_{n,0}\}_{n\geq 0}$) est appelée suite initiale (resp. finale) de la matrice de Seidel. Il est clair qu'une matrice de Seidel est entièrement déterminée par sa suite initiale ou finale.

LEMME 18. — *Si $a(t)$ (resp. $\bar{a}(t)$) est la fonction génératrice ordinaire de la suite initiale (resp. finale) d'une matrice de Seidel, alors :*

$$(5.1) \qquad a(t) = \frac{1}{1+t}\bar{a}\left(\frac{t}{1+t}\right) \qquad ou \qquad \bar{a}(t) = \frac{1}{1-t}a\left(\frac{t}{1-t}\right).$$

De plus, si $\bar{a}(t)$ admet le développement en fraction continue formelle

$$\bar{a}(t) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{c_1 t}{1 - \cfrac{c_2 t}{1 - \cfrac{c_3 t}{1 - \cfrac{c_4 t}{\ddots}}}}},$$

alors $a(t)$ a le développement en fraction continue formelle suivant :

$$a(t) = \cfrac{1}{1 + t - \cfrac{c_1 t}{1 - \cfrac{c_2 t}{1 + t - \cfrac{c_3 t}{1 - \cfrac{c_4 t}{\ddots}}}}}.$$

Démonstration : La première partie est classique, voir par exemple [Du2]. La seconde partie est une conséquence immédiate de (5.1). □

Dans ce qui suit, on adopte les notations vectorielles :

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \qquad et \qquad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_p).$$

Proposition 19. — *Si la suite finale $\{\bar{a}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ d'une matrice de Seidel satisfait la récurrence, $\mathbf{a}$ étant fixe :*

$$\text{(5.2)} \qquad \begin{cases} \bar{a}_0(\mathbf{x}) = 1, \\ \bar{a}_n(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})\bar{a}_{n-1}(\mathbf{x}+\mathbf{a}) + \beta(\mathbf{x})\bar{a}_{n-1}(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Alors la suite initiale $\{a_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ satisfait la récurrence

$$\text{(5.3)} \qquad \begin{cases} a_0(\mathbf{x}) = 1, \\ a_n(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})a_{n-1}(\mathbf{x}+\mathbf{a}) + [\beta(\mathbf{x}) - 1]a_{n-1}(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Démonstration : Soient $a(\mathbf{x};t) = \sum_{n\geq 0} a_n(\mathbf{x})t^n$ et $\bar{a}(\mathbf{x};t) = \sum_{n\geq 0} \bar{a}_n(\mathbf{x})t^n$ les séries génératrices ordinaires des $a_n(\mathbf{x})$ et $\bar{a}_n(\mathbf{x})$. La relation (5.2) entraîne alors que

$$\bar{a}(\mathbf{x};t) = 1 + \alpha(\mathbf{x})t\bar{a}(\mathbf{x}+\mathbf{a};t) + \beta(\mathbf{x})t\bar{a}(\mathbf{x};t).$$

En substituant t par $t/(1+t)$ dans l'identité ci-dessus et en la multipliant par $1/(1+t)$, on a d'après le Lemme 20 :

$$a(\mathbf{x};t) = 1 + \alpha(\mathbf{x})ta(\mathbf{x}+\mathbf{a};t) + [\beta(\mathbf{x})+1]ta(\mathbf{x};t).$$

On obtient la récurrence (5.3) en identifiant les coefficients de t^n dans les deux membres de la dernière identité. □

De même, on obtient la proposition suivante :

Proposition 20. — *Si la suite initiale* $\{a_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ *d'une matrice de Seidel satisfait la récurrence :*

$$\begin{cases} a_0(\mathbf{x}) = 1, \\ a_n(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})a_{n-1}(\mathbf{x}+\mathbf{a}) + \beta(\mathbf{x})a_{n-1}(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{5.4}$$

Alors la suite finale $\{\bar{a}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ *satisfait la récurrence*

$$\begin{cases} \bar{a}_0(\mathbf{x}) = 1, \\ \bar{a}_n(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})\bar{a}_{n-1}(\mathbf{x}+\mathbf{a}) + [\beta(\mathbf{x})+1]\bar{a}_{n-1}(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{5.5}$$

Proposition 21. — *Si une matrice de Seidel a pour suite initiale (resp. finale)* $\{\alpha^n P_n(x,y,\bar{x},\bar{y})\}_{n\geq 0}$, α *étant un nombre fixe, alors sa suite finale (resp. initiale) est* $\{\alpha^n \Gamma_{n+1}(x-a,\bar{y}+b,0,\bar{x}-b,y,a)\}_{n\geq 0}$ *avec* $ab\alpha = +1$ *(resp.* $ab\alpha = -1$*)*

Démonstration : Posons $a_n(x,y,\bar{x},\bar{y}) = \alpha^n P_n(x,y,\bar{x},\bar{y})$. D'après (1.2), les polynômes $a_n(x,y,\bar{x},\bar{y})$ sont définis par la récurrence :

$$\begin{cases} a_0(x,y,\bar{x},\bar{y}) \ = \ 1, \\ a_n(x,y,\bar{x},\bar{y}) = \alpha x(\bar{x}+\bar{y})a_{n-1}(x+1,y,\bar{x}+1,\bar{y}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -\alpha x(\bar{x}+\bar{y}-y)a_{n-1}(x,y,\bar{x},\bar{y}). \end{cases} \tag{5.6}$$

Donc, d'après la proposition précédente, sa suite finale $\{\bar{a}_n(x,y,\bar{x},\bar{y})\}$ est définie par :

$$\begin{cases} \bar{a}_0(x,y,\bar{x},\bar{y}) \ = \ 1, \\ \bar{a}_n(x,y,\bar{x},\bar{y}) = \alpha x(\bar{x}+\bar{y})\bar{a}_{n-1}(x+1,y,\bar{x}+1,\bar{y}) \\ \qquad\qquad\qquad -\alpha[x(\bar{x}+\bar{y}-y)-1/\alpha]\bar{a}_{n-1}(x,y,\bar{x},\bar{y}). \end{cases} \tag{5.7}$$

Or, en appliquant (2.6), la suite $\{\alpha^n\Gamma_{n+1}(x-a,\bar{y}+b,0,\bar{x}-b,y,a)\}_{n\geq 0}$ avec $ab\alpha = +1$ vérifie bien la récurrence (5.7). On fait la même démonstration pour l'autre. □

On en déduit en particulier le résultat suivant.

Corollaire 22. — *On note $\{a_n(x,y)\}_{n\geq 0}$ et $\{\bar a_n(x,y)\}_{n\geq 0}$ les suites initiale et finale d'une matrice de Seidel.*

$$\begin{aligned}
&\textit{Si}\ \ a_n(x,y)=xB_n(x,y),\ \ \textit{alors}\ \ \bar a_n(x,y)=\Gamma_{n+1}(x-1,2,0,y-1,1,1);\\
&\textit{si}\ \ \bar a_n(x,y)=xB_n(x,y),\ \ \textit{alors}\ \ a_n(x,y)=\Gamma_{n+1}(x-1,0,0,y+1,1,1);\\
&\textit{si}\ \ a_n(x,y)=C_n(x,y),\ \ \textit{alors}\ \ \bar a_n(x,y)=2^{2n}\Gamma_{n+1}(\frac{x-1}{2},1,0,\frac{y-1}{2},\frac12,\frac12);\\
&\textit{si}\ \ \bar a_n(x,y)=C_n(x,y),\ \ \textit{alors}\ \ a_n(x,y)=2^{2n}\Gamma_{n+1}(\frac{x-1}{2},1,0,\frac{y+1}{2},\frac12,\frac12).
\end{aligned}$$

En particulier, on constate que si la suite finale d'une matrice de Seidel est $\{H_{2n-1}\}_{n\geq 0}$ avec $H_{-1}=1$, alors la suite initiale dénombre les escaliers F tels que $\mathrm{mi}\,F=\mathrm{fd}\,F=\mathrm{snd}\,F=0$.

6. Nombres d'Euler médians

Prenons comme suite initiale d'une matrice de Seidel celle définie par :

$$a_0=0,\qquad a_{2n-1}=(-1)^{n-1}E_{2n-1},\qquad a_{2n}=(-1)^nE_{2n},$$

alors la matrice $(a_{n,k})_{n,k\geq 0}$ est

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & -1 & -2 & 5 & 16 & -61 & -272\ \cdots\\
1 & 0 & -3 & 3 & 21 & -45 & -333 & \cdots\\
1 & -3 & 0 & 24 & -24 & -378 & \cdots & \\
-2 & -3 & 24 & 0 & -402 & \cdots & & \\
-5 & 21 & 24 & -402 & \cdots & & & \\
16 & 45 & -378 & \cdots & & & & \\
61 & -333 & \cdots & & & & & \\
-272 & \cdots & & & & & &
\end{array}$$

Si l'on prend comme suite initiale d'une matrice de Seidel celle définie par :

$$b_0=0,\qquad b_{2n-1}=(-1)^{n-1}E_{2n-1},\qquad b_{2n}=(-1)^{n-1}E_{2n},$$

alors la matrice de Seidel correspondante $(b_{n,k})_{n,k\geq 0}$ est

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 1 & -2 & -5 & 16 & 61 & -272\ \cdots\\
1 & 2 & -1 & -7 & 11 & 77 & -211 & \cdots\\
3 & 1 & -8 & 4 & 88 & -134 & \cdots & \\
4 & 7 & -4 & 92 & -46 & \cdots & & \\
-3 & -11 & 88 & 46 & \cdots & & & \\
-14 & 77 & 134 & \cdots & & & & \\
63 & 211 & \cdots & & & & & \\
274 & \cdots & & & & & &
\end{array}$$

Inspiré par les travaux d'ARNOLD [Ar], DUMONT [Du2] a récemment défini les nombres d'Euler médians L_n et R_n comme les coefficients qui se trouvent dans les surdiagonaux de ces deux matrices de Seidel plus haut, *i.e.*,

$$R_n = (-1)^n a_{n,n+1}, \qquad L_n = (-1)^n b_{n,n+1}.$$

Le résultat suivant est dû à DUMONT [Du4].

THÉORÈME 23. — *On a les développements en fractions continues formelles suivants :*

$$\sum_{n\geq 0} L_n t^n = 1 + t + 4t^2 + 46t^3 + \cdots = \cfrac{1}{1-\cfrac{1\cdot 1t}{1-\cfrac{1\cdot 3t}{1-\cfrac{2\cdot 5t}{1-\cfrac{2\cdot 7t}{1-\cfrac{3\cdot 9t}{1-\cfrac{3\cdot 11t}{\ddots}}}}}}},$$

$$\sum_{n\geq 0} R_n t^n = 1 + 3t + 24t^2 + 402t^3 + \cdots = \cfrac{1}{1-\cfrac{1\cdot 3t}{1-\cfrac{1\cdot 5t}{1-\cfrac{2\cdot 7t}{1-\cfrac{2\cdot 9t}{1-\cfrac{3\cdot 11t}{1-\cfrac{3\cdot 13t}{\ddots}}}}}}}.$$

Nous allons montrer dans la suite que les polynômes $D_n(x)$ définis par :

$$D_n(x) = 2^{2n} P_n\left(\frac{x+1}{2}, 1, \frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad (n \geq 0). \tag{6.1}$$

sont une extension des nombres d'Euler médians.

De la relation (1.1) on déduit la relation de récurrence :

$$\begin{cases} D_0(x) = 1, \\ D_n(x) = (x+1)(x+2)D_{n-1}(x+2) - x(x+1)D_{n-1}(x). \end{cases} \tag{6.2}$$

Les premières valeurs de ces polynômes sont :

$$\begin{aligned}
D_0(x) &= 1,\\
D_1(x) &= 2(x+1),\\
D_2(x) &= 4(x+1)(2x+3),\\
D_3(x) &= 8(x+1)(6x^2+22x+21).
\end{aligned}$$

On voit aisément que $D_n(x)$ est un polynôme à cœfficients entiers positifs et divisible par $2^n(x+1)$ dans $\mathbf{Z}[x]$. On déduit aussi de la Proposition 2 le résultat suivant.

Proposition 24. — *On a*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} D_n(x)t^n &= \frac{1}{1+x(x+1)t} + \frac{(x+1)(x+2)t}{(1+x(x+1)t)(1+(x+2)(x+3)t)} + \cdots\\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{(x+1)_{2n}t^n}{\prod_{k=0}^{n}[1+(x+2k)(x+2k+1)t]}.
\end{aligned}$$

Du Théorème 3 on déduit le développement en fraction continue formelle de la série génératrice ordinaire des polynômes $D_n(x)$ suivant.

Théorème 25. — *On a*

$$\sum_{n\geq 0} D_n(x)t^n = \cfrac{1}{1-\cfrac{2(x+1)t}{1-\cfrac{2(x+2)t}{1-\cfrac{4(x+3)t}{1-\cfrac{4(x+4)t}{\ddots}}}}}.$$

Enfin le Théorème 6 implique les interprétations suivantes pour les polynômes $D_n(x)$.

Proposition 26. — *On a :*

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \sum_{F\in\mathcal{E}^*_{2n+2}} 2^{2n-\max F-\operatorname{sd} F}(x+1)^{\max F}\\
&= \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n}} 2^{2n-1-\max F-\operatorname{fd} F}(x+1)^{\max F+1}\\
&= \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n}} 2^{2n-1-\max F-\operatorname{sd} F}(x+1)^{\max F+1}.
\end{aligned}$$

Théorème 27. — *On a, pour tout $n \geq 0$:*

$$D_n(-\frac{1}{2}) = L_n, \qquad D_n(\frac{1}{2}) = R_n.$$

Démonstration : Si l'on substitue x par $-1/2$ et $1/2$ respectivement dans le Théorème 25, on trouve les mêmes fractions continues du Théorème 23. □

Nous constatons que les nombres d'Euler médians sont deux spécialisations des polynômes $D_n(x)$. En spécialisant les polynômes $D_n(x)$ de façon différente, nous pouvons obtenir d'autres suites d'entiers positifs. Par exemple, posons

$$l_n = 2^{-n} D_n(0) \qquad r_n = 2^{-n} D_n(1) \qquad n \geq 0,$$

alors le Théorème 25 implique les développements en fractions continues suivants.

Théorème 28. — *Nous avons*

$$\sum_{n\geq 0} l_n t^n = 1 + t + 3t^2 + 21t^3 + \cdots = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1\cdot 1t}{1 - \cfrac{1\cdot 2t}{1 - \cfrac{2\cdot 3t}{1 - \cfrac{2\cdot 4t}{1 - \cfrac{3\cdot 5t}{1 - \cfrac{3\cdot 6t}{\ddots}}}}}}},$$

$$\sum_{n\geq 0} r_n t^n = 1 + 2t + 10t^2 + 98t^3 + \cdots = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1\cdot 2t}{1 - \cfrac{1\cdot 3t}{1 - \cfrac{2\cdot 4t}{1 - \cfrac{2\cdot 5t}{1 - \cfrac{3\cdot 6t}{1 - \cfrac{3\cdot 7t}{\ddots}}}}}}}.$$

D'après les fractions continues dans les Théorèmes 23 et 28, il semble que les nombres l_n et r_n doivent avoir des propriétés voisines des nombres d'Euler médians.

De la Proposition 26 on obtient les interprétations suivantes.

Proposition 29. — *Nous avons*

$$L_n = \sum_{F\in\mathcal{E}^*_{2n+2}} 2^{2(n-\max F)-\mathrm{sd}\, F} = \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n}} 2^{2(n-1-\max F)-\mathrm{sd}\, F},$$

$$R_n = \sum_{F\in\mathcal{E}^*_{2n+2}} 2^{2(n-\max F)-\mathrm{sd}\, F} 3^{\max F} = \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n}} 2^{2(n-1-\max F)-\mathrm{sd}\, F} 3^{\max F}.$$

On voit que les exposants de 2 dans la proposition ci-dessus sont tous positifs ou nuls. Par conséquent, les nombres L_n et R_n sont des entiers ≥ 1. D'autre part, en appliquant la Proposition 1 avec $t = 1/2$, on a aussi :

PROPOSITION 30. — *On a*

$$L_n = \sum_{F \in \mathcal{E}^*_{2n+2}} (-1)^{\mathrm{mi}\,F} 4^{n-\max F} = \sum_{F \in \mathcal{E}_{2n}} (-1)^{\mathrm{mi}\,F} 4^{n-1-\max F},$$

$$R_n = \sum_{F \in \mathcal{E}^*_{2n+2}} 3^{\mathrm{mp}\,F} 4^{n-\max F} = \sum_{F \in \mathcal{E}_{2n}} 3^{\mathrm{mp}\,F+1} 4^{n-1-\max F}.$$

On déduit également de la Proposition 26 le résultat suivant.

THÉORÈME 31. — *On a*

$$l_n = \sum_{F \in \mathcal{E}^*_{2n+2}} 2^{n-\max F-\mathrm{sd}\,F} = \sum_{F \in \mathcal{E}_{2n}} 2^{n-1-\max F-\mathrm{fd}\,F} = \sum_{F \in \mathcal{E}_{2n}} 2^{n-1-\max F-\mathrm{sd}\,F},$$

$$r_n = \sum_{F \in \mathcal{E}^*_{2n+2}} 2^{n-\mathrm{sd}\,F} = \sum_{F \in \mathcal{E}_{2n}} 2^{n-\mathrm{fd}\,F} = \sum_{F \in \mathcal{E}_{2n}} 2^{n-\mathrm{sd}\,F}$$

D'autre part, compte tenu de (6.1), du Théorème 8 et de la Proposition 1 avec $t = -1/2$ et $1/2$, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 32. — *On a*

$$l_n = \sum_{\substack{F \in \mathcal{E}_{2n} \\ \mathrm{fd}\,F = 0}} 2^{n-1-\mathrm{mi}\,F}, \qquad r_n = \sum_{F \in \mathcal{E}_{2n}} 2^{n-\mathrm{mp}\,F}.$$

On voit que l_n est impair et r_n pair pour tout $n \geq 1$.

7. Nombres de Springer

Considérons la matrice de Seidel ayant $\{2^{2n} D_n(x)\}$ comme suite finale. D'après la Proposition 19 et les relations (6.1) et (6.2), sa suite initiale $\{S_n(x)\}_{n\geq 0}$ est définie par la récurrence :

$$\text{(7.1)} \qquad \begin{cases} S_0(x) = 1, \\ S_n(x) = (2x+2)(2x+4)S_{n-1}(x+2) - (2x+1)^2 S_{n-1}(x). \end{cases}$$

Les premières valeurs de ces polynômes sont :

$$\begin{aligned} S_0(x) &= 1, \\ S_1(x) &= 8x + 7, \\ S_2(x) &= 128x^2 + 304x + 177, \\ S_3(x) &= 3072x^3 + 13952x^2 + 21080x + 10199. \end{aligned}$$

En faisant une démonstration analogue à celle de la Proposition 2, on obtient la représentation suivante.

Proposition 33. — *On a*

$$\sum_{n\geq 0} S_n(x)t^n = \sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n}(x+1)_{2n}t^n}{\prod_{k=0}^{n}[1+\big(1+(2x+4k)(2x+4k+2)\big)t]}.$$

Le théorème suivant se déduit du Théorème 27 et du Lemme 18.

Théorème 34. — *La série génératrice ordinaire des polynômes $S_n(x)$ admet le développement en fraction continue*

$$\sum_{n\geq 0} S_n(x)t^n = \cfrac{1}{1+t-\cfrac{4\cdot 2(x+1)t}{1-\cfrac{4\cdot 2(x+2)t}{1+t-\cfrac{4\cdot 4(x+3)t}{1-\cfrac{4\cdot 4(x+4)t}{\ddots}}}}}.$$

Comme dans le cas des $D_n(x)$, on peut aussi interpréter les $S_n(x)$.

Théorème 35. — *On a*

$$S_n(x) = \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n+2}} 3^{\mathrm{fix}\, F} 4^{\mathrm{nmfs}\, F} (2x+1)^{\max F}.$$

Démonstration : Il est facile de montrer que les polynômes

$$4^{2n}\Gamma_{n+1}(\frac{2x+1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2x+1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$$

vérifient la récurrence (7.1). Le Theorème 35 en résulte. □

Proposition 36 (Dumont [Du2]). — *Si $\{S_{2n}\}_{n\geq 0}$ (resp. $\{S_{2n+1}\}_{n\geq 0}$) est la suite initiale d'une matrice de Seidel, alors $\{2^{2n}L_n\}_{n\geq 0}$ (resp. $\{2^{2n}R_n\}_{n\geq 0}$) est la suite finale.*

Le Théorème 27 et la Proposition 36 nous donnent le résultat suivant.

Théorème 37. — *On a*

$$S_n(-\frac{1}{2}) = S_{2n} \quad \textit{et} \quad S_n(\frac{1}{2}) = S_{2n+1}.$$

Posons, pour tout $n\geq 1$,

$$n!! = \begin{cases} 2\cdot 4\cdots 2p & \text{si } n=2p,\\ 1\cdot 3\cdots(2p+1) & \text{si } n=2p+1.\end{cases}$$

On tire de la Proposition 35 les représentations suivantes.

Corollaire 38. — *Nous avons*

$$\sum_{n\geq 0} S_{2n}t^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(4n+1)!!t^n}{\prod_{k=0}^{n}[1+[1+(4k+1)(4k+3)]t]},$$
$$\sum_{n\geq 0} S_{2n+1}t^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(4n-1)!!t^n}{\prod_{k=1}^{n}[1+[1+(4k-1)(4k+1)]t]}.$$

Corollaire 39. — *On a*

$$S_{2n} = \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n}} 3^{\mathrm{fix}\,F+1}4^{\mathrm{nfs}\,F-2},$$
$$S_{2n+1} = \sum_{F\in\mathcal{E}_{2n+2}} 2^{\max F}3^{\mathrm{fix}\,F}4^{\mathrm{nmfs}\,F}$$

Démonstration : A tout escalier F sur $[2n+2]$ tel que $\max F = 0$, on associe l'escalier G sur $[2n]$ déduit de F par suppression de la ligne supérieure. Ceci établit une bijection entre $\mathcal{E}_{2n}$ et l'ensemble des escaliers F sur $[2n+2]$ tels que $\max F = 0$, ayant la propriété :

$$\mathrm{fix}\,G = \mathrm{fix}\,F - 1, \qquad \mathrm{sur}\,G = \mathrm{sur}\,F - 1.$$

D'où le résultat en appliquant les Théorèmes 29 et 31. □

Dans [Ar], Arnold a donné des interprétations combinatoires des nombres de Springer en terme de *permutations signées alternées*. Donc, le problème ouvert est d'établir des liens entre son modèle et le nôtre.

BIBLIOGRAPHIE

[Ar] Arnold (V.I.). — *The calculus of snakes and the combinatorics of Bernoulli, Euler and Springer numbers of Coxeter groups*, Russian Math. Surveys, t. **47 : 1**, 1992, p. 1–51.

[Ca1] Carlitz (L.). — *A conjecture conserning Genocchi numbers*, K. Norske Vidensk. Selsk. Sk., t. **9**, 1972, p. 1–4.

[Ca2] Carlitz (L.). — *Explicit formulas for the Dumont-Foata polynomials*, Disc. Math., t. **30**, 1980, p. 211–225.

[Co] Comtet (L.). — *Analyse Combinatoire*, t.1, Collection SUP., PUF, Paris, 1970, pp. 63–64.

[Du1] Dumont (D.). — *Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi*, Duke Math. J., t. **41(2)**, 1974, p. 305–318.

[**Du2**] Dumont (D.). — *Pics de cycle et dérivées partielles*, Actes du Séminaire lotharingien de Combinatoire, 13^{e} session, 1985, Publication IRMA, Strasbourg.

[**Du3**] Dumont (D.). — *Conjectures sur des symétries ternaires liées aux nombres de Genocchi*, Discrete Math., t. **139**, 1995, p. 469–472.

[**Du4**] Dumont (D.). — *Further triangles of Seidel-Arnold type and continued fractions related to Euler and Springer numbers*, Adv. Appl. Math., t. **16**, 1995, p. 275–296.

[**Du-Fo**] Dumont (D.) et Foata (D.). — *Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi*, Bull. Soc. Math. France, t. **104**, 1976, p. 433–451.

[**Du-Ra**] Dumont (D.) et Randrianarivony (A.). — *Sur une extension des nombres de Genocchi*, Europ. J. Comb., t. **16**, 1995, p. 147–151.

[**Ga**] Gandhi (J.). — *A conjectured representation of Geenocchi numbers*, Amer. Math. Monthly, t. **77(1)**, 1970, p. 505–506.

[**Ha**] Han (G. N.). — *Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi et propriétés de symétrie*, Actes de l'atelier de combinatoire franco-québecois, Publ. de LACIM, t. **10**, 1992, p. 119–137.

[**Ra**] Randrianarivony (A.). — *Sur une extension des polynômes de Dumont–Foata* , à paraître.

[**Ra-Ze**] Randrianarivony (A.) et Zeng (J.). — *Sur une extension des nombres d'Euler et les records des permutations alternantes*, J. Comb. Th., Ser. A, t. **66**, 1994, p. 86–99.

[**Ri-St**] Riordan (J.) et Stein (P.). — *Proof of a conjecture on Genocchi numbers*, Discrete Math., t. **5**, 1973, p. 381–388.

[**Vi**] Viennot. — *Théorie combinatoire des nombres d'Euler et de Genocchi*, Séminaire de Théorie des nombres, exposé $n^{\circ}11$, Publ. de l'Université de Bordeaux I, 1980.

[**Wa**] Wall (H. S.). — *Continued fractions and totally monotone sequences*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **48**, 1940, p. 165–184.

[**Ze**] Zeng (J.). — *Sur les symétries ternaires des nombres de Genocchi*, Discrete Math., t. **153**, 1996, p. 319–333.

Département de Mathématiques
Université Louis-Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France