Polynômes d'Euler et Fractions continues de Stieltjes-Rogers

Dominique Dumont et Jiang Zeng
Département de Mathématique, Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cédex, France

10 octobre, 1996

Abstract

It is well-known that the Euler polynomials $E_{2n}(x)$ with $n \geq 0$ can be expressed as a polynomial $H_n(x(x-1))$ of $x(x-1)$. We extend $H_n(u)$ to formal power series for $n < 0$ and prove several properties of the coefficients appearing in these polynomials or series, which generalize some recent results, independently obtained by Hammersley [7] and Horadam [8], and answer a question of Kreweras [9]. We also deduce several continued fraction expansions for the generating function of Euler polynomials, some of these formulae had been published by Stieltjes [14] and by Rogers [11] without proof. These formulae generalize our earlier results concerning Genocchi numbers, Euler numbers and Springer numbers [5, 4].

1 Introduction

Les polynômes d'Euler sont un analogue "tordu" des polynômes de Bernoulli qu'on trouve classiquement répertoriés dans les recueils de fonctions spéciales. Les coefficients de plus bas degrés de ces deux suites de polynômes sont respectivement, à un coefficient de normalisation près, les nombres de Genocchi, de série génératrice $\frac{2t}{e^t+1}$, et les nombres de Bernoulli, de série génératrice $\frac{t}{e^t-1}$.

Un cadre agréable pour l'étude des polynômes d'Euler de rangs *pairs* $E_{2n}(x)$ consiste à les considérer comme des polynômes dans la variable $u :=$

$x(x-1)$. C'est ainsi qu'au moins quatre auteurs ont, de manière indépendante les uns des autres, été amenés à étudier les polynômes que nous notons $H_n(u)$ dans cet article. Il s'agit de :

- Stieltjes [14], dans ses travaux sur les fractions continues;
- Hammersley [7], dans un exercice "de premier cycle" sur les manipulations de séries;
- Horadam [8], dans son étude des "polynômes de Genocchi" (à un coefficient de normalisation près, ce sont les polynômes d'Euler);
- Kreweras [9], dans l'inversion d'une matrice de coefficients binomiaux.

Notre objectif sera ici de faire le lien entre ces quatre approches. Nous serons également conduits à développer les aspects "équations fonctionnelles" et "fractions continues" du sujet, dans la ligne des travaux de Stieltjes [14], de Rogers [11], et de Ramanujan [12].

La suite de cet article se divise en quatre sections :

2 Polynômes d'Euler de rangs pairs;

3 Triangle contenant les deux espèces de nombres de Genocchi;

4 La transformation de Laplace formelle;

5 Fractions continues de Stieltjes-Rogers.

2 Polynômes d'Euler de rangs pairs

Les nombres d'Euler E_{2n} et les polynômes d'Euler $E_n(x)$ $(n \geq 0)$ sont respectivement définis par leurs fonctions génératrices [3, p. 43]:

$$\frac{1}{\cosh t} = \frac{2e^t}{e^{2t}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n E_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \tag{1}$$

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{2}$$

Horadam [8] a défini les polynômes de Genocchi $G_n(x)$ par

$$\frac{2te^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{3}$$

D'où $G_{n+1}(x) = (n+1)E_n(x)$ pour $n \geq 0$.

Le premier membre de (2) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{2e^{t/2}\cdot e^{(x-1/2)t}}{e^t+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k E_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(x-1/2)^l t^l}{l!} && (4)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{E_{2k}}{2^{2k}}\binom{n}{2k}(x-\frac{1}{2})^{n-2k}. && (5)
\end{aligned}$$

On obtient donc l'expression suivante :

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{E_{2k}}{2^{2k}}\binom{n}{2k}(x-\frac{1}{2})^{n-2k}. \tag{6}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
E_{2n}(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{E_{2k}}{2^{2k}}\binom{2n}{2k}(x-\frac{1}{2})^{2n-2k}\\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{E_{2k}}{2^{2k}}\binom{2n}{2k}\left(x(x-1)+\frac{1}{4}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Donc, $E_{2n}(x)$ peut s'exprimer comme un polynôme en $u = x(x-1)$. Plus précisément, posons $H_n(u) = E_{2n}(x)$. Alors

$$H_n(u) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \frac{E_{2l}}{2^{2n-2k}}\binom{2n}{2l}\binom{n-l}{k} u^k. \tag{7}$$

Voici les premiers polynômes $H_n(u)$:

$$\begin{aligned}
H_1(u) &= u,\\
H_2(u) &= -u + u^2,\\
H_3(u) &= 3u - 3u^2 + u^3,\\
H_4(u) &= -17u + 17u^2 - 6u^3 + u^4,\\
H_5(u) &= 155u - 155u^2 + 55u^3 - 10u^4 + u^5,\\
H_6(u) &= -2073u + 2073u^2 - 736u^3 + 135u^4 - 15u^5 + u^6.
\end{aligned}$$

Les polynômes $H_n(u)$ apparurent d'abord dans les oeuvres de Stieltjes [14] en liaison avec une fraction continue. Soit la série génératrice ordinaire :

$$h(t,\,u) = \sum_{n\geq 0} H_n(u) t^{2n+2} = t^2 + ut^4 + (-u+u^2)t^6 + \cdots \tag{8}$$

Stieltjes [14] a donné sans démonstration la représentation en fraction continue de $h(t,\,u)$ comme suit.

Théorème 1 *Soit $u = x(x-1)$. Alors*

$$\begin{aligned} h(t,\,u) &= t \int_0^{+\infty} \frac{\cosh(x-1/2)z}{\cosh z/2} e^{-z/t} dz & (9) \\ &= \cfrac{t^2}{1 - \cfrac{u\,t^2}{1 + \cfrac{1^2\,t^2}{1 + \cfrac{\ddots}{1 + \cfrac{(n(n+1)-u)\,t^2}{1 + \cfrac{(n+1)^2\,t^2}{\ddots}}}}}}. & (10) \end{aligned}$$

Plus récemment les polynômes $H_n(u)$ ont été étudiés par Hammersley [7] (voir aussi [6, Exercice 7.52]), qui démontre notamment que $(-1)^n H_n(-u)$ est un polynôme à coefficients entiers positifs pour $n \geq 1$. Ce dernier résultat est en fait une conséquence du théorème de Stieltjes ci-dessus. Enfin Horadam [8] a étudié indépendamment ces polynômes en liaison avec les nombres et polynômes de Genocchi.

On se propose dans cet article de généraliser les coefficents $h_{n,\,k}$ apparaissant dans les polynômes $H_n(u)$ aux *entiers relatifs*, par analogie avec les extensions aux indices négatifs des *nombres binomiaux* et *nombres de Stirling* [6, Chapter 5].

Rappelons que pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}, & \text{si } m \geq 0; \\ 0, & \text{si } m < 0. \end{cases}$$

Pour $n,\,k \in \mathbf{Z}$, posons

$$h_{n,\,k} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \frac{E_{2l}}{2^{2n-2k}} \binom{2n}{2l} \binom{n-l}{n-k-l}, & \text{si } n \geq k; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{11}$$

$n\backslash k$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
-6	1												
-5	-15	1											
-4	115	-10	1										
-3	-493	45	-6	1									
-2	1000	-92	13	-3	1								
-1	-608	56	-8	2	-1	1							
0							1						
1								1					
2								-1	1				
3								3	-3	1			
4								-17	17	-6	1		
5								155	-155	55	-10	1	
6								-2073	2073	-736	135	-15	1

Table 1: $h_{n,k}$ pour $-6 \leq n,\, k \leq 6$.

Les premières valeurs $h_{n,\,k}$ sont données dans la table 1.

Le résultat suivant généralise celui de Hammersley [7] et Horadam [8], qui correspond au cas où $n,\, k \geq 0$.

Proposition 2 *Pour $n,\, k \in \mathbf{Z}$, les coefficients $h_{n,k}$ vérifient $h_{n,0} = \delta_{n\,0}$, $h_{n,\,n} = 1$ et*

$$2(k+1)(2k+1)h_{n,\,k+1} + (k+2)(k+1)h_{n,\,k+2} = 2n(2n-1)h_{n-1,\,k}. \qquad (12)$$

Preuve: Les nombres d'Euler vérifient la récurrence [3] :

$$E_0 = 1, \quad \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{2k}{2l} E_{2l} = 0 \quad (k \geq 1). \qquad (13)$$

D'où $h_{n,\,0} = \delta_{n\,0}$. D'autre part, pour $n, k \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned} & 2(k+1)(2k+1)h_{n,\,k+1} + (k+2)(k+1)h_{n,\,k+2} \\ & = \sum_{l=0}^{n-k-1} (-1)^l \frac{E_{2l}}{2^{2n-2k-3}} \binom{2n}{2l} (k+1) \end{aligned}$$

$$\cdot\left[(2k+1)\binom{n-l}{n-k-l-1}+(2k+4)\binom{n-l}{n-k-l-2}\right]$$
$$= 2n(2n-1)\sum_{l=0}^{n-k-1}(-1)^l\frac{E_{2l}}{2^{2n-2k-2}}\binom{2n-2}{2l}\binom{n-l-1}{n-k-l-1}.$$

D'où l'équation (12). $\square$

Les nombres de Genocchi G_{2n} et les nombres de Genocchi médians H_{2n+1} peuvent être engendrés par le *triangle de Seidel* [5] :

1				
1	1			
2	1			
2	3	3		
8	6	3		
8	14	17	17	
56	48	34	17	
56	104	138	155	155
...				

$\Longrightarrow$

n	1	2	3	4	5	...
G_{2n}	1	1	3	17	155	...
H_{2n-1}	1	1	2	8	56	...

Proposition 3 *On a*

$$h_{n,1} = (-1)^{n-1}G_{2n}, \tag{14}$$
$$h_{-1,-n} = (-1)^{n-1}H_{2n-1}, \tag{15}$$

pour $n\geq 1$ *et* $h_{n,1}=-h_{n,2}$ *pour* $n\geq 2$.

Preuve: Les nombres de Genocchi G_{2n} (voir [3, 5]) ont pour fonction génératrice :

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^nG_{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!} = -t\tanh\frac{t}{2}. \tag{16}$$

Comme

$$\begin{aligned}\tanh\frac{t}{2} &= \sum_{s\geq 0}\frac{(t/2)^{2s+1}}{(2s+1)!}\cdot\sum_{m\geq 0}(-1)^mE_{2m}\frac{(t/2)^{2m}}{(2m)!}\\ &= \sum_{s,m\geq 0}\frac{(-1)^m}{2^{2m+2s+1}}\frac{E_{2m}t^{2m+2s+1}}{(2m)!(2s+1)!}\\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{2n-1}{2m}\frac{(-1)^m}{2^{2n-1}}\frac{E_{2m}t^{2n-1}}{(2n-1)!},\end{aligned}$$

on en déduit donc, pour $n \geq 1$,

$$G_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k}(n-k)\binom{2n}{2k}\frac{E_{2k}}{2^{2n-2}}, \tag{17}$$

ce qui est exactement $(-1)^{n-1}h_{n,1}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} h_{-1,-n} &= \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l \frac{E_{2l}}{2^{2n-2}}\binom{-2}{2l}\binom{-1-l}{n-l-1} \\ &= (-1)^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{E_{2l}}{2^{2n-2}}(2l+1)\binom{n-1}{l}. \end{aligned}$$

D'où l'égalité $h_{-1,-n} = (-1)^{n-1}H_{2n-1}$ d'après [5, Corollaire 3]. Enfin, l'égalité $h_{n,1} = -h_{n,2}$ $(n \geq 2)$ découle de (12) pour $k = 0$. $\square$

Kreweras [9] avait observé que l'inverse de la matrice infinie $(\binom{n}{2n-2k})_{n,k}$, dont la sous-matrice $(\binom{n}{2n-2k})_{-6\leq n,k\leq 6}$ est donnée dans la table 2, fait apparaître des coefficients donnés dans la table 1. Montrons que cela reste vrai dans le cas général.

Soit $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ pour $n \geq 1$ et $(x)_0 = 1$.

Proposition 4 *Soient $n \geq m$ des entiers. Alors*

$$c_{n,m} := \sum_{k=m}^{n}\binom{k}{2k-2m}h_{n,k} = \delta_{n\,m}. \tag{18}$$

Preuve: a) Supposons d'abord que $m,\, n \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} c_{n,m} &= \sum_{l\geq 0}(-1)^l E_{2l}\binom{2n}{2l}\sum_{k\geq 0}\frac{(n-l)!}{2^{2(n-m-k)}(m-k)!(2k)!(n-l-m-k)!} \\ &= \sum_{l\geq 0}(-1)^l\frac{E_{2l}}{4^{n-m}}\binom{2n}{2l}\binom{n-l}{m}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n+m+l, & -m \\ & 1/2\end{matrix};1\right) \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Chu-Vandermonde [6, (5.93)], on trouve

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}-n+m+l, & -m \\ & 1/2\end{matrix};1\right) = \frac{(1/2+n-m-l)_m}{(1/2)_m}.$$

$n\backslash k$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
-6	1												
-5	15	1											
-4	35	10	1										
-3	28	15	6	1									
-2	9	7	5	3	1								
-1	1	1	1	1	1	1							
0							1						
1								1					
2								1	1				
3									3	1			
4									1	6	1		
5										5	10	1	
6										1	15	15	1

Table 2: $\binom{n}{2n-2k}$ pour $-6 \leq n,\, k \leq 6$.

D'où l'on déduit, d'après (13), que

$$c_{n,m} = \frac{(2m+1)_{2n-2m}}{4^{n-m}(2n-2m)!} \sum_{l=0}^{n-m} (-1)^l E_{2l} \binom{2n-2m}{2l} = \delta_{n\,m}. \tag{19}$$

b) Supposons maintenant que $m,\, n \leq 0$. Alors

$$c_{n,m} = \sum_{l \geq 0} E_{2l} \binom{2n}{2l} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{n-m-k}(k-m-1)!}{2^{2(n-m-k)}(2k)!(n-l-m-k)!(l-n-1)!}. \tag{20}$$

Par un calcul analogue on trouve le même résultat (19). $\square$

Remarque 1: La proposition 4 équivaut aux deux équations matricielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & & \\ 3 & -3 & 1 & & & \\ -17 & 17 & -6 & 1 & & \\ 155 & -155 & 55 & -10 & 1 & \\ & \dots & & \dots & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ & 3 & 1 & & & \\ & 1 & 6 & 1 & & \\ & & 5 & 10 & 1 & \\ & \dots & & \dots & & \ddots \end{pmatrix} = I, \tag{21}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -8 & 56 & \dots \\ & 1 & -3 & 13 & -92 & \dots \\ & & 1 & -6 & 45 & \dots \\ & & & 1 & -10 & \dots \\ & & & & 1 & \dots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ & 1 & 3 & 5 & 7 & \dots \\ & & 1 & 6 & 15 & \dots \\ & & & 1 & 10 & \dots \\ & & & & 1 & \dots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} = I, \qquad (22)$$

où I est la matrice identité infinie.

Remarque 2: Si l'on généralise la définition (7) de $H_n(u)$ aux indices négatives :

$$H_n(u) = \sum_{k \le n} h_{n,k} u^k \qquad n \in \mathbf{Z}, \qquad (23)$$

alors la relation (18) équivaut à l'équation fonctionnelle :

$$H_n(u(u-1)) + H_n(u(u+1)) = 2u^{2n}, \quad n \in \mathbf{Z}. \qquad (24)$$

En particulier, l'équation

$$H_{-1}(u(u-1)) + H_{-1}(u(u+1)) = \frac{2}{u^2} \qquad (25)$$

n'est autre que la réecriture de l'identité

$$h\left(\frac{x^2}{1-x}\right) + h\left(\frac{x^2}{1+x}\right) = 2x^2 \qquad (26)$$

de l'article de Dumont-Zeng [5] avec $H_{-1}(u) = h(1/u)$.

Remarque 3: Pour $n \ge 0$, l'identité (24) peut aussi être démontrée comme suit. On note d'abord que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x(x-1)) \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} E_{2n}(x) \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \frac{\cosh(x-1/2)t}{\cosh t/2}. \qquad (27)$$

Or

$$\frac{\cosh(x-1/2)t}{\cosh t/2} + \frac{\cosh(x+1/2)t}{\cosh t/2} = 2\cosh xt.$$

D'où (24) pour $n \geq 0$. Dans (27), posons $u = x(x-1)$, alors $x - 1/2 = \frac{1}{2}\sqrt{1+4u}$. On obtient donc la fonction génératrice exponentielle pour la suite $\{H_n(u)\}_{n\geq 0}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} H_n(u)\frac{t^{2n}}{(2n)!} = \frac{\cosh\left(\frac{t}{2}\sqrt{1+4u}\right)}{\cosh\frac{t}{2}}. \tag{28}$$

Chassant le dénominateur $\cosh\frac{t}{2}$ et puis égalisant les coefficients de $t^{2n}/(2n)!$ dans l'équation ci-dessus on obtient la récurrence pour $H_n(u)$:

$$\left(\frac{1}{4}+u\right)^n = \sum_{m=0}^{n}\binom{2n}{2m}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-m} H_m(u). \tag{29}$$

Cette drenière récurrence fut le point de départ de Hammersley [7] pour $p_n(u) = (-1)^n H_n(-u)$. En fait, il est facile de voir que (24) implique une autre récurrence linéaire pour $H_n(u)$:

$$u^n = \sum_{0\leq 2i\leq n}\binom{n}{2i} H_{n-i}(u), \qquad n \geq 1. \tag{30}$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des propositions 2 et 4.

Corollaire 5 *Pour tous n, $k \in \mathbf{Z}$, les coefficients $(-1)^{n-k}h_{n\,k}$ sont des entiers positifs. De plus, $(-1)^{n-k}h_{n\,k} > 0$ pour $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$ ou $k \leq n \leq -1$.*

3 Triangle contenant les deux espèces de nombres de Genocchi

Remarquons que pour $n \geq 1$

$$h_{n+k,\,k+1} = \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\frac{E_{2l}}{2^{2(n-1)}}\binom{2n+2k}{2l}\binom{n+k-l}{n-l-1} \tag{31}$$

est un polynôme en k de degré $2n-2$ dont le coefficient de k^{2n-2} est $(-1)^{n-1}E_{2n-2}/(2n-2)!$. D'après un résultat classique [13, p. 208], on sait qu'il existe un polynôme $K_n(x)$ de degré $\leq 2n-2$ tel que

$$(-1)^{n-1} \sum_{k \geq 0} h_{n+k,\,k+1} x^{k+1} = \frac{K_n(x)}{(1-x)^{2n-1}}, \tag{32}$$

et $K_n(1) = E_{2n-2}$. Par exemple, pour $n = 1, 2, 3, 4$ l'équation (32) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
x + x^2 + x^3 + \cdots &= \frac{x}{1-x}; \\
-(x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + 15x^5 + \cdots) &= \frac{-x}{(1-x)^3}; \\
3x + 17x^2 + 55x^3 + 135x^4 + 286x^5 + \cdots &= \frac{3x + 2x^2}{(1-x)^5}; \\
-(17x + 155x^2 + 736x^3 + 2492x^4 + \cdots) &= -\frac{17x + 36x^2 + 8x^3}{(1-x)^7}.
\end{aligned}$$

On se propose de démontrer que $K_n(x)$ $(n \geq 2)$ est un polynôme de degré $n-1$ à coefficients entiers positifs. Le résultat suivant est classique (voir [13, Chapitre 4]).

Lemme 6 *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_d$ des nombres complexes, $d \geq 1$ et $a_d \neq 0$. Si $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ est une application telle que $\sum_{n \geq 0} f(n) x^n = P(x)/Q(x)$, où $Q(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_d x^d$ et $P(x)$ est un polynôme de degré plus petit que d, alors*

$$\sum_{n \geq 1} f(-n) x^n = -\frac{P(1/x)}{Q(1/x)}.$$

Pour $n \geq 1$ si l'on pose

$$(-1)^{n-1} \sum_{k \geq 0} h_{n+k,\,k+1} x^{k+1} = \frac{k_{n,1} x + k_{n,2} x^2 + \cdots + k_{n,d} x^d}{(1-x)^{2n-1}}, \tag{33}$$

où $d \leq 2n-2$. Alors, d'après la proposition 2, il est évident que $k_{n,1} = G_{2n}$. Par ailleurs, le lemme 6 implique que

$$(-1)^{n-1} \sum_{k \geq 1} h_{n-k,\,1-k} x^k = \frac{k_{n,1} x^{2n-1} + \cdots + k_{n,d} x^{2n-d}}{(1-x)^{2n-1}}. \tag{34}$$

Si $n=1$, les deux équations ci-dessus se réduisent à

$$x+x^2+x^3+\cdots=\frac{x}{1-x}.$$

Or, si $n>1$, on a $h_{n-1,0}=h_{n-1,-1}=\cdots=h_{0,1-n}=0$ et $h_{-1,-n}=(-1)^{n-1}H_{2n-1}$ d'après la proposition 3. On doit donc avoir $d=n-1$ et $k_{n,n-1}=H_{2n-1}$. En multipliant $(1-x)^{2n-1}$ aux deux membres de (33) et en égalant les coefficients on obtient l'équation suivante :

$$k_{n,\,j}=\sum_{i\geq 0}(-1)^{n+j-i}\binom{2n-1}{j-i-1}h_{n+i,\,i+1},\quad 1\leq j\leq n-1, \tag{35}$$

ce qui montre que $k_{n,\,j}$ sont des entiers. D'autre part, il est facile de voir que la récurrence (12) équivaut à

$$\begin{aligned}
x&\left(\sum_{k\geq 0}h_{n+k,\,k+1}x^{k+1}\right)''+\frac{1}{2}\left(\sum_{k\geq 0}h_{n+k,\,k+1}x^{k+1}\right)'+\\
&\frac{1}{4}\left(\sum_{k\geq 0}h_{n-1+k,\,k+1}x^{k+1}\right)''=\frac{\delta_{n,\,1}}{2}+x^{2-n}\left(\sum_{k\geq 0}h_{n+k,\,k+1}x^{k+n+1}\right)''\\
&\qquad\qquad+\frac{x^{1-n}}{2}\left(\sum_{k\geq 0}h_{n+k,\,k+1}x^{k+n+1}\right)'.
\end{aligned} \tag{36}$$

Compte tenu de (32), l'équation ci-dessus équivaut à

$$\begin{aligned}
&x\left(\frac{K_n(x)}{(1-x)^{2n-1}}\right)''+\frac{1}{2}\left(\frac{K_n(x)}{(1-x)^{2n-1}}\right)'-x^{2-n}\left(\frac{x^nK_n(x)}{(1-x)^{2n-1}}\right)''\\
&-\frac{x^{1-n}}{2}\left(\frac{x^nK_n(x)}{(1-x)^{2n-1}}\right)'=\frac{\delta_{n,\,1}}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{K_{n-1}(x)}{(1-x)^{2n-3}}\right)''.
\end{aligned} \tag{37}$$

Par conséquent, pour $n\geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
2(x &- x^2)K_n''(x)+[(4n-5)x+1]K_n'(x)\\
&- (2n^2-3n+1)K_n(x)=\frac{1}{2}(1-x)^2K_{n-1}''(x)\\
&+ (2n-3)(1-x)K_{n-1}'(x)+(2n^2-5n+3)K_{n-1}(x).
\end{aligned} \tag{38}$$

On en déduit donc une relation de récurrence pour $k_{n,\,j}$ en égalant les coefficients de x^j, d'où:

$$\begin{aligned}(2j+1)(j+1)\,k_{n,\,j+1} &= (n-j-1)[2(n-j)-1]k_{n,\,j}\\ &+\frac{1}{2}(j+1)(j+2)k_{n-1,\,j+2}+(2n-3-j)(j+1)k_{n-1,\,j+1}\\ &+\frac{1}{2}\left[(n-j)^2+n(3n-2j-10)+6\right]k_{n-1,\,j},\end{aligned} \tag{39}$$

avec $k_{1,\,1}=1$ et $k_{n,\,j}=0$ pour $n<0$ ou $j\geq n$ $(n\geq 2)$.

En utilisant la formule (39) et par double récurrence on peut vérifier sans peine que tous les coefficients $k_{n,\,j}$ $(1\leq j\leq n-1)$ sont positifs. Les premières valeurs de $k_{n,j}$ sont tabulées dans la table 3.

$n\backslash j$	1	2	3	4	5	$\sum_j k_{n,\,j}$
1	1					1
2	1					1
3	3	2				5
4	17	36	8			61
5	155	678	496	56		1385
6	2073	15820	23576	8444	608	50521

Table 3: $k_{n,j}$ pour $1\leq j\leq n\leq 6$.

On résume ce qui précède dans la proposition suivante.

Proposition 7 *Soit n un entier ≥ 1. Alors, il existe des entiers positifs $k_{n,\,j}$ définis par (39) tels que*

$$(-1)^{n-1}\sum_{k\geq 0}h_{n+k,\,k+1}x^{k+1}=\frac{k_{n,1}x+k_{n,2}x^2+\cdots+k_{n,n-1}x^{n-1}}{(1-x)^{2n-1}}.$$

De plus, on a $k_{n,1}+k_{n,2}+\cdots+k_{n,n-1}=E_{2n-2}$, $k_{n,1}=G_{2n}$ et $k_{n,n-1}=H_{2n-1}$.

Remarque : On sait depuis André [1] que les nombres d'Euler énumèrent les *permutations alternantes*, il serait donc intéressant de trouver une *interprétation combinatoire* pour $k_{n,\,j}$ dans ce dernier modèle.

Hammersley [7] a défini un autre triangle $(c_{n,\,j})$ par

$$(-1)^{n-1}h_{n+k,\,k+1}=\sum_{j=0}^{n-2}c_{n-1,\,j+1}\binom{n+k}{n+j}, \tag{40}$$

et a démontré que les coefficients $c_{n\,j}$ sont des entiers positifs vérifiant

$$\begin{aligned} j(2j-1)c_{n,\,j} &= (j+n)\left[2(n-j+1)c_{n,\,j-1}+\frac{1}{2}(j+n-1)+j\,c_{n-1,\,j}\right] \\ &\quad +\frac{1}{2}j(j+1)c_{n-1,\,j+1} \qquad (1\le j\le n), \end{aligned} \tag{41}$$

avec la convention $c_{n,0}=c_{n-1,\,n}=c_{n,\,n+1}=0$.

Par exemple, on a pour $n=2,3,4$ les formules suivantes :

$$\begin{aligned} -h_{k+2,\,k+1} &= \binom{k+2}{2}, \\ h_{k+3,\,k+1} &= 3\binom{k+3}{3}+5\binom{k+3}{4}, \\ -h_{k+4,\,k+1} &= 17\binom{k+4}{4}+70\binom{k+4}{5}+61\binom{k+4}{6}. \end{aligned}$$

Il est facile d'établir le lien avec notre triangle $(k_{n,\,j})$. En effet, si l'on développe $(1-x)^{-(2n-1)}$ par la formule binomiale et identifie les coefficients dans les deux membres de (33), on obtient

$$(-1)^{n-1}h_{n+k,\,k+1} = \sum_{i=0}^{n-2} k_{n,\,i+1}\binom{2n-2-i+k}{2n-2} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{n-2} k_{n,\,i+1}\sum_{l\ge 0}\binom{n-2-i}{l}\binom{n+k}{2n-2-l} \\ &= \sum_{j=0}^{n-2}\left(\sum_{i=0}^{j} k_{n,\,i+1}\binom{n-2-i}{j-i}\right)\binom{n+k}{n+j}. \end{aligned} \tag{43}$$

Par comparaison de (43) et (40) on a

$$c_{n-1,\,j+1}=\sum_{i=0}^{j} k_{n,\,i+1}\binom{n-2-i}{j-i}, \quad 0\le j\le n-2. \tag{44}$$

Autrement dit, notre triangle $(k_{n,\,j})$ raffine en quelque sorte le triangle $(c_{n,\,j})$ de Hammersley. On trouve les premières valeurs de $c_{n,\,j}$ dans la table 4.

$n\backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	3	5				
3	17	70	61			
4	155	1143	2317	1385		
5	2073	23716	82286	110556	50521	
6	38227	623753	3243270	7258090	7293671	2702765

Table 4: $c_{n,j}$ pour $1 \leq j \leq n \leq 6$.

4 La transformation de Laplace formelle

La transformation de Laplace *formelle* sur $\mathbf{C}[[x]]$ est l'opérateur linéaire $\mathcal{L}$ définie sur la base $\{t^n\}$ par :

$$\mathcal{L}(t^n,\, x) = n!\, x^{n+1} = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t/x} dt.$$

L'écriture intégrale doit être comprise comme un simple abus de notation.

Lemme 8 *Soit* $f(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + \cdots + a_n \frac{x^n}{n!} + \cdots \in \mathbf{C}[[x]]$. *Alors*

$$\mathcal{L}(f(t),\, x) = a_0 x + x\mathcal{L}(f'(t),\, x), \tag{45}$$

$$\mathcal{L}(f(-t), -x) = -\mathcal{L}(f(t),\, x). \tag{46}$$

Preuve: La première identité est évidente. Pour la seconde, on remarque que

$$\mathcal{L}((-t)^n, -x) = (-1)^n n! (-x)^{n+1} = -n! x^{n+1},$$

d'où le résultat par linéarité. $\square$

Théorème 9 *Soit* $\varphi(x)$ *une série formelle. Alors, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i)

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cosh at}{\cosh t} e^{-t/x} dt.$$

(ii)

$$\varphi(x) \quad \textit{est impaire et} \quad \varphi\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{x}{1-ax} \qquad \textit{paire.}$$

(iii)

$$\varphi\left(\frac{x}{1-x}\right) + \varphi\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{2x}{1-a^2x^2}.$$

Preuve: ((i)$\Longrightarrow$ (ii)) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t/x}F(t)dt$. Il est clair que $f(x)$ est paire (*resp.* impaire) si et seulement si $F(x)$ est impaire (*resp.* paire). D'autre part,

$$\varphi\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{x}{1-ax} = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(1-a)t}{\cosh t} e^{-t/x} dt.$$

Comme $\frac{\cosh at}{\cosh t}$ est paire et $\frac{\sinh(1-a)t}{\cosh t}$ impaire, on obtient donc l'assertion (ii).

((ii)$\Longrightarrow$(iii)) Comme $\varphi(\frac{x}{1-x}) - \frac{x}{1-ax}$ est paire, on a

$$\varphi\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{x}{1-ax} = \varphi\left(\frac{-x}{1+x}\right) + \frac{x}{1+ax}.$$

L'assertion (iii) s'ensuit donc du fait que φ est impaire.

((iii)$\Longrightarrow$ (i)) Soit $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t/x}F(t)$. Alors

$$\varphi\left(\frac{x}{1-x}\right) + \varphi\left(\frac{x}{1+x}\right) = \int_0^{+\infty} (e^t + e^{-t})F(t)e^{-t/x}dt = \frac{2x}{1-a^2x^2}.$$

Or $\frac{2x}{1-a^2x^2} = \int_0^{+\infty} 2e^{-t/x}\cosh at dt$. D'où $(e^t + e^{-t})F(t) = 2\cosh at$ et $F(x) = \frac{\cosh at}{\cosh t}$. □

Théorème 10 *Soit $\varphi(x)$ une série formelle. Alors, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i)

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh at}{\cosh t} e^{-t/x} dt.$$

(ii)

$$\psi(x) \quad \textit{est paire et} \quad \psi\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{x}{1-ax} \qquad \textit{impaire.}$$

(iii)
$$\psi\left(\frac{x}{1-x}\right)+\psi\left(\frac{x}{1+x}\right)=\frac{2ax}{1-a^2x^2}.$$

Preuve: ((i)$\Longrightarrow$ (ii)) Soit $f(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t/x}F(t)dt$. Il est évident que $f(x)$ est paire (*resp.* impaire) si et seulement si $F(x)$ est impaire (*resp.* paire). D'autre part,
$$\psi\left(\frac{x}{1-x}\right)-\frac{x}{1-ax}=-\int_0^{+\infty}\frac{\cosh(a-1)t}{\cosh t}e^{-t/x}dt.$$

Comme $\frac{\sinh at}{\cosh t}$ est impaire et $\frac{\cosh(a-1)t}{\cosh t}$ paire, on obtient donc l'assertion (ii).

((ii)$\Longrightarrow$(iii)) Comme $\psi(\frac{x}{1-x})-\frac{x}{1-ax}$ est im paire, on a
$$\psi\left(\frac{x}{1-x}\right)-\frac{x}{1-ax}=-\psi\left(\frac{-x}{1+x}\right)+\frac{x}{1+ax}.$$

L'assertion (iii) s'ensuit donc du fait que ψ est paire.

((iii)$\Longrightarrow$ (i)) Soit $\psi(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t/x}F(t)$. Alors
$$\psi\left(\frac{x}{1-x}\right)+\psi\left(\frac{x}{1+x}\right)=\int_0^{+\infty}(e^t+e^{-t})F(t)e^{-t/x}dt=\frac{2ax}{1+a^2x^2}.$$

Or $\frac{2ax}{1+a^2x^2}=\int_0^{+\infty}2e^{-t/x}\sinh at dt$. D'où $(e^t+e^{-t})F(t)=2\sinh at$ et $F(x)=\frac{\sinh at}{\cosh t}$. □

5 Fractions continues de Stieltjes-Rogers

Les fractions continues considérées ici représentent des séries formelles. Les deux lemmes suivants peuvent être établis par le simple fait que
$$\cfrac{1}{1+\cfrac{ax}{A(x)}}=1-\frac{ax}{ax+A(x)},$$

où $A(x)$ est une série formelle inversible. On trouvera également une preuve simple de ces lemmes dans [5].

Lemme 11 *On a la formule de contraction :*

$$\cfrac{c_0}{1-\cfrac{c_1\,t}{1-\cfrac{c_2\,t}{1-\cfrac{c_3\,t}{\ddots}}}} = c_0 + \cfrac{c_0c_1\,t}{1-(c_1+c_2)\,t-\cfrac{c_2c_3\,t^2}{1-(c_3+c_4)\,t-\cfrac{c_4c_5\,t^2}{\ddots}}}$$

$$= \cfrac{c_0}{1-c_1\,t-\cfrac{c_1c_2\,t^2}{1-(c_2+c_3)\,t-\cfrac{c_3c_4\,t^2}{\ddots}}}.$$

Lemme 12 *Soient $\{a_n\}_{n\geq 1}$, $\{b_n\}_{n\geq 1}$ et $\{c_n\}_{n\geq 1}$ trois suites de nombres complexes. L'égalité*

$$1+bx+\theta x^2 + \cfrac{b_1\,x^2}{1+\cfrac{b_2\,x^2}{1+b\,x+\theta\,x^2+\cfrac{b_3\,x^2}{1+\cfrac{b_4\,x^2}{\ddots}}}}$$

$$= 1+a_1\,x+\cfrac{c_1\,x^2}{1+a_2\,x+\cfrac{c_2\,x^2}{1+a_3\,x+\cfrac{c_3\,x^2}{1+a_4\,x+\cfrac{c_4\,x^2}{\ddots}}}}$$

équivaut aux identiés suivantes ($n\geq 0$) : $a_{2n+1}=b$, $a_{2n+2}=0$, $b_1=c_1-\theta$ et

$$\begin{aligned} b_{2n+1}b_{2n+2} &= c_{2n+1}c_{2n+2}, \\ b_{2n}+b_{2n+1} &= c_{2n}+c_{2n+1}-\theta. \end{aligned}$$

Le lemme suivant découle facilement du lemme 12.

Lemme 13 *Soient $\{a_n\}_{n\geq 1}$ et $\{b_n\}_{n\geq 1}$ deux suites non nulles. Alors le système déquations $a_1+\alpha=b_1+\beta$ et pour $n\geq 0$:*

$$\begin{aligned} a_{2n+1}a_{2n+2} &= b_{2n+1}b_{2n+2}, \\ a_{2n+2}+a_{2n+3}+\alpha &= b_{2n+2}+b_{2n+3}+\beta, \end{aligned}$$

équivaut à

$$1+\alpha x^2+\cfrac{a_1\,x^2}{1+\cfrac{a_2\,x^2}{1+\alpha\,x^2+\cfrac{a_3\,x^2}{1+\cfrac{a_4\,x^2}{\ddots}}}}=1+\beta x^2+\cfrac{b_1\,x^2}{1+\cfrac{b_2\,x^2}{1+\beta x^2+\cfrac{b_3\,x^2}{1+\cfrac{b_4\,x^2}{\ddots}}}}.$$

On cherche maintenant à développer $\varphi(x)$ en fraction continue. Pour ce faire, comme $\varphi(x)$ est une fonction impaire, on pose

$$\varphi(x)=\cfrac{x}{1-\cfrac{b_1b_2\,x^2}{1-\cfrac{b_3b_4\,x^2}{1-\cfrac{b_5b_6\,x^2}{\ddots}}}}. \tag{47}$$

D'autre part, comme $\varphi(\frac{x}{1-x})-\frac{x}{1-ax}$ est paire, on pose

$$\varphi\left(\frac{x}{1-x}\right)-\frac{x}{1-ax}=\cfrac{(1-a)\,x^2}{1-\cfrac{c_1\,x^2}{1-\cfrac{c_2\,x^2}{1-\cfrac{c_3\,x^2}{\ddots}}}}. \tag{48}$$

Substituant (47) dans (48) et remplaçant x par $\frac{x}{1+a\,x}$, on obtient

$$\cfrac{x}{1-(1-a)x-\cfrac{b_1b_2\,x^2}{1-(1-a)x-\cfrac{b_3b_4\,x^2}{1-(1-a)x-\cfrac{b_5b_6\,x^2}{\ddots}}}}-x$$

$$=\cfrac{(1-a)\,x^2}{(1+a\,x)^2-\cfrac{c_1\,x^2}{1-\cfrac{c_2\,x^2}{(1+a\,x)^2-\cfrac{c_3\,x^2}{\ddots}}}}. \tag{49}$$

Posons $b_{2n} + b_{2n+1} = 1 - a$ pour $n \geq 1$. Alors le lemme 11 permet de réécrire le premier membre de (49) comme suit :

$$\cfrac{b_1\, x^2}{1 - (b_1 + b_2)x - \cfrac{b_2 b_3\, x^2}{1 - (b_3 + b_4)x - \cfrac{b_4 b_5\, x^2}{1 - (b_5 + b_6)x - \cfrac{b_6 b_7\, x^2}{\ddots}}}} \tag{50}$$

D'où $b_1 = 1 - a$, et l'on déduit du lemme 12 que

$$b_{4n+1} + b_{4n+2} = -2a, \quad b_{4n+3} + b_{4n+4} = 0, \qquad n \geq 0.$$

Compte tenu du fait que $b_{2n} + b_{2n+1} = 1 - a$, on obtient pour $n \geq 0$

$$\begin{array}{llll} b_{4n+1} & = 2n + 1 - a, & b_{4n+2} & = -(2n + 1 + a), \\ b_{4n+3} & = 2n, & b_{4n+4} & = -2n. \end{array}$$

En substituant ces valeurs dans (47) on obtient le résultat suivant, dont la seconde égalité résulte du lemme 13.

Théorème 14 *On a*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cosh at}{\cosh t} e^{-t/x} dt \qquad (51) \\ &= \cfrac{x}{1 + \cfrac{(1^2 - a^2)\, x^2}{1 + \cfrac{2^2\, x^2}{1 + \cfrac{(3^2 - a^2)\, x^2}{1 + \cfrac{4^2\, x^2}{\ddots}}}}} \qquad (52) \\ &= \cfrac{x}{1 - (1 - a)^2\, x^2 + \cfrac{2(1 - a)\, x^2}{1 + \cfrac{2(1 + a)\, x^2}{1 - (1 - a)^2\, x^2 + \cfrac{4(3 - a)\, x^2}{1 + \cfrac{4(3 + a)\, x^2}{\ddots}}}}}. \qquad (53) \end{aligned}$$

La première formule a été donnée par Rogers [11] sans démonstration, mais la seconde semble nouvelle. On trouveras d'autres résultats analogues dans les travaux de Ramanujan [2, 12] et Rogers [10]. On déduit facilement de la formule de Rogers ci-dessus celle de Stieltjes [14] consignée dans le théorème 1.

On montre maintenant que le théorème 1 implique le développement en fraction continue de nombres de Genocchi, qui a été démontré d'abord par Viennot [15] par des méthodes combinatoires, et puis par les auteurs [5] de façon algébrique.

Corollaire 15 *On a*

$$1 - t^2 + 3\,t^4 - \cdots + (-1)^n G_{2n+2}\, t^{2n} + \cdots = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2\, t^2}{1 + \cfrac{1 \cdot 2\, t^2}{1 + \cfrac{2^2\, t^2}{1 + \cfrac{2 \cdot 3\, t^2}{\ddots}}}}}. \tag{54}$$

Preuve: Par contraction, on déduit du théorème 1 l'identité

$$ut^4 + (u^2 - u)t^6 + \ldots + H_n(u)\, t^{2n+2} + \ldots = \cfrac{u\, t^4}{1 - u\, t^2 + \cfrac{1^2\, t^4}{1 + \cfrac{(1 \cdot 2 - u)\, t^2}{1 + \cfrac{2^2\, t^4}{\ddots}}}}.$$

En simplifiant $u\,t^4$ et puis posant $u = 0$, on obtient la formule (54) en vertu de la proposition 3. $\square$

Dans le théorème suivant la formule (57) a été donnée par Rogers [11] sans démonstration.

Théorème 16 *On a*

$$\psi(x) \quad = \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sinh at}{\cosh t} e^{-t/x} dt \tag{55}$$

$$= \cfrac{ax^2}{1-(1-a)^2x^2+\cfrac{2(2-a)\,x^2}{1+\cfrac{2(2+a)\,x^2}{1-(1-a)^2x^2+\cfrac{4(4-a)\,x^2}{1+\cfrac{4(4+a)\,x^2}{\ddots}}}}} \tag{56}$$

$$= \cfrac{ax^2}{1-x^2+\cfrac{(2^2-a^2)\,x^2}{1+\cfrac{2^2\,x^2}{1-x^2+\cfrac{(4^2-a^2)\,x^2}{1+\cfrac{4^2\,x^2}{\ddots}}}}}. \tag{57}$$

Preuve: Comme $\psi(x)$ est paire, on pose

$$\psi(x) = \cfrac{ax^2}{1+\cfrac{b_1\,x^2}{1+\cfrac{b_2\,x^2}{1+\cfrac{b_3\,x^2}{1+\cfrac{b_4\,x^2}{\ddots}}}}}. \tag{58}$$

D'autre part, comme $\psi(\frac{x}{1-x}) - \frac{x}{1-ax}$ est impaire, on pose

$$\psi(\frac{x}{1-x}) - \frac{x}{1-ax} = \cfrac{-x}{1-\cfrac{c_1c_2\,x^2}{1-\cfrac{c_3c_4\,x^2}{1-\cfrac{c_5c_6\,x^2}{\ddots}}}}. \tag{59}$$

En remplaçant x par $\frac{x}{1+ax}$ dans l'équation ci-dessus et en utilisant (58), on a

$$\cfrac{a\,x^2}{[1+(a-1)x]^2+\cfrac{b_1\,x^2}{1+\cfrac{b_2\,x^2}{[1+(a-1)x]^2+\cfrac{b_3\,x^2}{\ddots}}}}$$

$$= x+\cfrac{-x}{1+a\,x-\cfrac{c_1c_2\,x^2}{1+a\,x-\cfrac{c_3c_4\,x^2}{1+a\,x-\cfrac{c_5c_6\,x^2}{\ddots}}}}. \tag{60}$$

Dans le lemme 11 posons

$$c_1=-a=c_2+c_3=\cdots=c_{2n}+c_{2n+1},\quad n\geq 1, \tag{61}$$

alors

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{x}{1+(a-1)x}\right) &= \cfrac{a\,x^2}{[1+(a-1)x]^2+\cfrac{b_1\,x^2}{1+\cfrac{b_2\,x^2}{[1+(a-1)x]^2+\cfrac{b_3\,x^2}{\ddots}}}}\\ &= \cfrac{a\,x^2}{1-(c_1+c_2)\,x-\cfrac{c_2c_3\,x^2}{1-(c_3+c_4)\,x-\cfrac{c_4c_5\,x^2}{\ddots}}}.\end{aligned} \tag{62}$$

En appliquant le lemme 12 avec $b=2(a-1)$ et $\theta=(a-1)^2$, on obtient

$$c_{4n+1}+c_{4n+2}=2(1-a),\quad c_{4n+3}+c_{4n+4}=0,\quad n\geq 0. \tag{63}$$

De (61) et (63) on déduit successivement :

$$\begin{aligned}c_1 &= -a,\ c_2=2-a,\ c_3=-2,\ c_4=2,\\ c_5 &= -a-2,\ c_6=4-a,\ c_7=-4,\ c_8=4,\end{aligned}$$

et, plus généralement,

$$\begin{aligned} c_{4n+1} &= -a-2n,\ c_{4n+2} = -a+2(n+1), && (64)\\ c_{4n+3} &= -2(n+1),\ c_{4n+4} = 2(n+1), \quad n \geq 0. && (65) \end{aligned}$$

Dans (62), remplaçant x par $\frac{x}{1+(1-a)x}$, on obtient la première fraction continue du théorème. En vertu du lemme 12, on voit facilement que la seconde fraction continue équivaut à la première. $\square$

Le résultat suivant a aussi été donné par Stieltjes [14] sans démonstration.

Théorème 17 *Soit $u = x(x-1)$. Alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1}(x) t^{2n+2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(x-1/2)z}{\cosh z/2} e^{-z/t} dz \tag{66}$$

$$= \cfrac{(x-1/2)t^2}{1+\alpha_1 t^2 - \cfrac{\lambda_1 t^4}{\cfrac{\ddots}{1+\alpha_n t^2 - \cfrac{\lambda_n t^4}{\ddots}}}}, \tag{67}$$

où, pour $n \geq 1$, les coefficients génériques sont

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(2n-1)^2 - u, \qquad \lambda_n = n^2(\frac{1}{4}(4n^2-1) - u). \tag{68}$$

Preuve: Notons d'abord que

$$s(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(x-1/2)z}{\cosh z/2} e^{-z/t} dz = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sinh(2x-1)z}{\cosh z} e^{-z/(t/2)} dz.$$

En appliquant le théorème 16 on a

$$s(x) = \cfrac{(x-1/2)t^2}{1-(t/2)^2 + \cfrac{(1^2-(x-1/2)^2)\,t^2}{1+\cfrac{1^2\,t^2}{1-(t/2)^2+\cfrac{(2^2-(x-1/2)^2)\,t^2}{\ddots}}}}, \tag{69}$$

où les coefficients génériques sont $n^2-(x-1/2)^2$ et n^2 pour $n\geq 1$. Donc, d'après les lemmes 12 et 11 on a la représentation en fraction continue de $s(x)$:

$$
\begin{aligned}
s(x) &= \cfrac{(x-1/2)\,t^2}{1+\cfrac{c_1\,t^2}{1+\cfrac{c_2\,t^2}{1+\cfrac{c_3\,t^2}{\ddots}}}} && (70)\\
&= \cfrac{(x-1/2)t^2}{1+c_1\,t^2-\cfrac{c_1c_2\,t^4}{1+(c_2+c_3)\,t^2-\cfrac{c_3c_4\,t^4}{1+(c_4+c_5)\,t^2-\cfrac{c_5c_6\,t^2}{\ddots}}}}, && (71)
\end{aligned}
$$

où les coefficients c_n vérifient $c_1=(1^2-(x-1/2)^2)+(1/2)^2=\frac{1}{2}-u$ et, pour $n\geq 1$,

$$
\begin{aligned}
c_{2n-1}c_{2n} &= n^2\left(n^2-(x-\frac{1}{2})^2\right)=n^2(\frac{4n^2-1}{4}-u), && (72)\\
c_{2n}+c_{2n+1} &= n^2-(x-\frac{1}{2})^2+(n+1)^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}(2n+1)^2-u. && (73)
\end{aligned}
$$

D'où le théorème. $\square$

On déduit facilement des théorèmes 14 et 16 le corollaire suivant, dans lequel les formules (76), (77) et (78) ont été obtenues récemment par le permier auteur [4]. Posons

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x-3x^3+57x^5-\cdots=\int_0^\infty \frac{\cosh t}{\cosh 2t}e^{-t/x}dt, && (74)\\
q(x) &= x^2-11x^4+361x^6-\cdots=\int_0^\infty \frac{\sinh t}{\cosh 2t}e^{-t/x}dt. && (75)
\end{aligned}
$$

Corollaire 18 *Les séries $p(x)$ et $q(x)$ ont les représentations en fractions continues :*

$$p(x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{3\,x^2}{1+\cfrac{16\,x^2}{1+\cfrac{35\,x^2}{1+\cfrac{64\,x^2}{\ddots}}}}} \tag{76}$$

$$= \cfrac{x}{1-x^2+\cfrac{4\,x^2}{1+\cfrac{12\,x^2}{1-x^2+\cfrac{40\,x^2}{1+\cfrac{56\,x^2}{\ddots}}}}}. \tag{77}$$

où les coefficients génériques successifs sont $(4n-3)(4n-1)$ et $(4n)^2$ dans la première fraction continue, $4n(4n-3)$ et $4n(4n-1)$ dans la seconde.

$$q(x) = \cfrac{x^2}{1-x^2+\cfrac{12\,x^2}{1+\cfrac{20\,x^2}{1-x^2+\cfrac{56\,x^2}{1+\cfrac{72\,x^2}{\ddots}}}}} \tag{78}$$

$$= \cfrac{x^2}{1-4x^2+\cfrac{15\,x^2}{1+\cfrac{16\,x^2}{1-4x^2+\cfrac{63\,x^2}{1+\cfrac{64\,x^2}{\ddots}}}}}, \tag{79}$$

où les coefficients génériques successifs sont $4n(4n-1)$ et $4n(4n+1)$ dans la première fraction, et $(4n-1)(4n+1)$ et $(4n)^2$ dans la seconde.

En appliquant la première formule du théorème 16 on obtient un autre résultat de [4, Proposition 5]. Soit

$$
\begin{aligned}
e(x) &= x + \sum_{n\geq 0}(-1)^n E_{2n+1} x^{2n+2} - \sum_{n\geq 0}(-1)^n E_{2n} x^{2n+1} && (80)\\
&= \int_0^\infty \left(1 + \frac{\sinh t}{\cosh t} - \frac{1}{\cosh t}\right) e^{-t/x} dt && (81)\\
&= 2\int_0^\infty \frac{\sinh t/2}{\cosh t} e^{-t/y} dt, && (82)
\end{aligned}
$$

où $y = \frac{x}{1-x/2}$.

Corollaire 19 *La série $e(x)$ a la représentation en fraction continue :*

$$
\begin{aligned}
e(x) &= x^2 + x^3 - 2x^4 - 5x^5 + 16x^6 + 61x^7 - \cdots && (83)\\
&= \cfrac{x^2}{1 - x + \cfrac{3\,x^2}{1 + \cfrac{5\,x^2}{1 - x + \cfrac{14\,x^2}{1 + \cfrac{18\,x^2}{\ddots}}}}}, && (84)
\end{aligned}
$$

où les coefficients génériques successifs sont $n(4n-1)$ et $n(4n+1)$.

Références

[1] D. André: Développements de $\sec x$ et de $\tan x$, C.R. Acad. Sci. Paris, **88** (1879), 965–967.

[2] B. Berndt: Ramanujan's Notebook, Part II, Springer–Verlag, New York, 1985.

[3] L. Comtet: Advanced Combinatorics, Dordrecht, Reidel, 1974.

[4] D. Dumont: Further Triangles of Seidel-Arnold Type and Continued Fractions Related to Euler and Springer Numbers, Adv. Appl. Math., **16** (1995), 275–296.

[5] D. Dumont and J. Zeng: Further results on Euler and Genocchi numbers, Aequationes Mathematics, **47** (1994), 31–42.

[6] P. Graham, D. Knuth and O. Patashnik: Concrete Mathematics, Addison Wesley, second edition, 1994.

[7] J. M. Hammersley: An undergraduate exercise in manipulation, The Mathematical Scientist, **14** (1989), 1–23.

[8] A. F. Horadam: Generation of Genocchi polynomials of first order by recurrence relations, Fibonacci Quart., **3** (1992), 239–243.

[9] G. Kreweras: Communication privée, 1994.

[10] L. Rogers: On the representation of certain asymptotic series as convergent continued fractions, Proc. London Math. Soc., **4** (1906), 72–89.

[11] L. Rogers: Supplementary note on the representation of certain asymptotic series as convergent continued fractions, Proc. London Math. Soc., **4** (1907), 393–395.

[12] C. Preece: Theorems stated by Ramanujan (X), J. London Math. Soc., **6** (1931), 23–32.

[13] R. Stanley: Enumerative Combinatorics, Vol. 1, Wadsworth & Brooks/Cole, California, 1986.

[14] T. Stieltjes: Recherches sur les fractions continues, Ann. Fac. Sci. Toulouse, **9** (1895), 1–47.

[15] G. X. Viennot: Théorie combinatoire des nombres d'Euler et Genocchi, Séminaire de Théorie des nombres, Exposé no. 11, Publications de l'Université de Bordeaux I, 1980-1981.