ÉNUMÉRATIONS DE PERMUTATIONS ET J-FRACTIONS CONTINUES

Par

Jiang ZENG

Abstract. — In this paper, we evaluate the generating function of the symmetric group with respect to five statistics. The continued fraction expansion of its ordinary generating function is then derived by the methods of Stieltjes and Rogers, which implies especially the combinatorial interpretation of the moments of the orthogonal Sheffer polynomials.

1. Introduction

Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Étant donnée une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, chaque valeur $x = \sigma(i)$, $1 \le i \le n$, se trouve alors dans l'un des cinq cas suivants :

un *pic de cycle*, si $\sigma^{-1}(x) < x > \sigma(x)$;
un *creux de cycle*, si $\sigma^{-1}(x) > x < \sigma(x)$;
une *double montée de cycle*, si $\sigma^{-1}(x) < x < \sigma(x)$;
une *double descente de cycle*, si $\sigma^{-1}(x) > x > \sigma(x)$;
un *point fixe*, si $\sigma(i) = i$. On note le nombre des pics, creux, doubles montées, points fixes et doubles descentes de cycle de σ respectivement par $\mathrm{pic}\,\sigma$, $\mathrm{cc}\,\sigma$, $\mathrm{dm}\,\sigma$, $\mathrm{fix}\,\sigma$ et $\mathrm{dd}\,\sigma$. D'autre part $\mathrm{cyc}\,\sigma$ désigne le nombre de cycles de σ. On s'intéresse au polynôme générateur suivant :

$$\mu_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} u_1^{\mathrm{cc}\,\sigma} u_2^{\mathrm{pic}\,\sigma} u_3^{\mathrm{dm}\,\sigma} u_4^{\mathrm{dd}\,\sigma} \alpha^{\mathrm{fix}\,\sigma} \beta^{\mathrm{cyc}\,\sigma}. \tag{1.1}$$

Les trois premières valeurs de μ_n sont données par

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \alpha\beta, \\ \mu_2 &= \alpha^2\beta^2 + u_1 u_2 \beta, \\ \mu_3 &= \alpha^3\beta^3 + 3u_1u_2\alpha\beta^2 + u_1u_2(u_3+u_4)\beta. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Le polynôme générateur (1.1) ou ses variantes ont été beaucoup étudié dans la littérature, parmis les nombreux articles, on ne cite que [Ca-Sc1, Ca-Sc2, Fo-St, Fr-Vi, Fl2, Vi]. L'objet de cet article est de démontrer les trois théorèmes suivants.

Théorème 1. — *On a*

$$1 + \sum_{n \ge 1} \mu_n \frac{x^n}{n!} = e^{\alpha\beta x} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 e^{\alpha_2 x} - \alpha_2 e^{\alpha_1 x}} \right)^{\beta}. \tag{1.3}$$

où $\alpha_1\alpha_2 = u_1u_2$ *et* $\alpha_1+\alpha_2 = u_3+u_4$.

THÉORÈME 2. — *On a*

$$1+\sum_{n\geq 1}\mu_n x^n = \frac{1}{1-(\alpha-\alpha_2)\beta x}\cdot\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha_2^n(\beta)_n x^n}{\prod_{k=1}^n[1-\big((\alpha-\alpha_2)\beta+k(\alpha_1-\alpha_2)\big)x]}, \tag{1.4}$$

où $\alpha_1\alpha_2 = u_1u_2$ *et* $\alpha_1+\alpha_2 = u_3+u_4$.

THÉORÈME 3. — *On a*

$$1+\sum_{n\geq 1}\mu_n x^n =$$

$$\cfrac{1}{1-\alpha\beta x-\cfrac{\beta u_1u_2x^2}{1-(\alpha\beta+u_3+u_4)x-\cfrac{2(\beta+1)u_1u_2x^2}{\cfrac{\ddots}{1-(\alpha\beta+n(u_4+u_3))x-\cfrac{(n+1)(\beta+n)u_1u_2x^2}{\ddots}}}}}.$$

Notons que le théorème 1 a été obtenu implicitement par CARLITZ et SCOVILLE [Ca-Sc1, Ca-Sc2] par des calculs sophistiqués. Le théorème 3 est une variante améliorée d'un énoncé de VIENNOT [Vi, II-43, V-7], qui l'a démontré à l'aide d'une bijection de FRANÇON et VIENNOT [Fr-Vi] et un théorème de FLAJOLET sur fraction continue de type Jacobi [Fl2]. En fait, cet article a été motivé par le désir de déduire le théorème 3 de la fonction génératrice exponentielle des μ_n, *i.e*, le théorème 1, par la formule d'addition due à STIELTJES et ROGERS (*cf.* [St], [Ro] et [Wa]). Jusqu'ici, il semble que seuls les cas particuliers du théorème 3 par cette approche ont été obtenus dans la littérature, voir [Fl1, Fl2, Go-Ja].

Il est bien connu [Ch] que le théorème 3 équivaut aussi à l'énoncé suivant : les polynômes $P_n(x)$ orthogonaux par rapport aux moments μ_n sont définis par la relation de récurrence :

$$P_{n+1}(x) = \big(x-(\alpha\beta+n(u_4+u_3))\big)P_n(x)-(n+1)(\beta+1)u_1u_2P_{n-1}(x), \quad n\geq 0,$$

avec $P_{-1}(x)=0$ et $P_0(x)=1$.

On constate que la récurrence ci-dessus généralise celles satisfaites par les polynômes de Sheffer [Ch, appendix]. En spécialisant les paramètres, on déduire de (1.1) les interprétations combinatoires des moments des polynômes de Sheffer dans [Vi]. Voir aussi [Ze] pour une autre démonstration de ce résultat.

Nous démontrons les théorèmes 1 et 2 au paragraphe 2. On déduit le théorème 3 au paragraphe 3 par deux méthodes, respectivement du theoréme 1 et du théorème 2. Enfin, on conclut l'article avec quelques commentaires et résultats supplémentaires au paragraphe 4

2. Fonctions génératrices exponentielles et ordinaires

Pour l'évaluation de la fonction génératrice exponentielle de μ_n on aura besoin une autre interprétation des statistiques introduites au début de cet article. Plus précisément on identifie chaque permutation $\sigma \in \sigma_n$ au mot $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$. Avec la convention $\sigma(0) = n+1$ et $\sigma(n+1) = 0$, on dira que $x = \sigma(i)$, $1 \le i \le n$ est respectivement

un *pic*, si $\sigma(i-1) < x > \sigma(i+1)$;

un *creux*, si $\sigma(i-1) > x < \sigma(i+1)$;

une *double montée*, si $\sigma(i-1) < x < \sigma(i+1)$;

une *double descente*, si $\sigma(i-1) > x > \sigma(i+1)$.

Enfin, l'élément $\sigma(i)$ est dit un *élément saillant inférieur à gauche* si $\sigma(i) < \sigma(j)$ pour tout j tel que $1 \le j < i$.

Soit $\pi \in \mathcal{S}_n$. Rappelons la *transformation fondamentale* $\pi \mapsto \hat{\pi}$ sur les permutations (*cf.* [Fo-Sc]) comme suit : étant donnée une permutation π factorisée en cycles, on écrit chaque cycle avec son plus petit élément en premier, et on arrange les cycles suivant l'ordre décroissant de leurs plus petits éléments. On obtient alors $\hat{\pi}$ en effaçant les parenthèses. Par exemple, si $\pi = (35)(2)(164)$, on aura $\hat{\pi} = 352164$.

D'après cette transformation, on voit aisément que les deux définitions ci-dessus sont équivalentes. En effet, chaque pic (resp. creux, double montée) de *cycle* de π correspond bijectivement à un pic (resp. creux, double montée) de $\hat{\pi}$ et chaque double descente de *cycle* (resp. point fixe) de π correspond d'une façon biunivoque à une double descente de $\hat{\pi}$ qui n'est pas (resp. est) à la fois un élément saillant inférieur à gauche de $\hat{\pi}$.

Soient u_1, u_2, u_3, u_4 quatre variables commutatives. Etant donnée une permutation $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, on lui associe le mot $w_1(\sigma) = a_1 a_2 \cdots a_n$ (resp. $w_2(\sigma)$), où $a_i = u_1$ si $\sigma(i)$ est un *creux*, $a_i = u_2$ si $\sigma(i)$ est un *pic*, $a_i = u_3$ si $\sigma(i)$ est une *double montée* et $a_i = u_4$ si $\sigma(i)$ est une *double descente* avec la convention que $\sigma(0) = \sigma(n+1) = 0$ (resp. $\sigma(0) = n+1$ et $\sigma(n+1) = 0$). Soit

$$U(x) = \sum_{n \ge 1} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} w_1(\sigma) \frac{x^n}{n!}, \tag{2.1}$$

$$V(x) = \sum_{n \ge 1} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} w_2(\sigma) \frac{x^n}{n!}, \tag{2.2}$$

les fonctions génératrices correspondantes.

PROPOSITION 4. — *Les deux fonctions génératrices ont les expressions suivantes :*

$$U(x) = u_2 \frac{e^{\alpha_2 x} - e^{\alpha_1 x}}{\alpha_2 e^{\alpha_1 x} - \alpha_1 e^{\alpha_2 x}} = u_2 x + (u_3 + u_4) u_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots, \tag{2.3}$$

$$V(x) = \frac{e^{u_4 x}(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_2 e^{\alpha_1 x} - \alpha_1 e^{\alpha_2 x}} - 1 = u_4 x + (u_1 u_2 + u_4^2) \frac{x^2}{2!} + \ldots, \tag{2.4}$$

où $\alpha_1\alpha_2 = u_1u_2$ *et* $\alpha_1+\alpha_2 = u_3+u_4$.

Démonstration. — Étant donnée une permutation $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ sur $\{1,2,\ldots,n\}$, si l'on enlève l'élément 1, on obtient deux permutations, $\sigma' = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(j-1)$ et $\sigma'' = \sigma(j+1)\cdots\sigma(n)$, où $\sigma(j)=1$. Les nombres de pics, creux, doubles montées et doubles descentes de σ sont respectivement la somme de ceux de σ' et σ'' à ceci près que si σ' (resp. σ'') est vide, on compte un creux (resp. une double descente) de plus pour σ. On obtient donc l'équation différentielle

$$U'(x) = u_2 + (u_3+u_4)U(x) + u_1U(x)^2. \tag{2.5}$$

Un analyse analogue conduit à

$$V'(x) = (u_4 + u_1U(x))(1+V(x)). \tag{2.6}$$

En résolvant (2.5) d'abord et (2.6) ensuite, qui sont à variables séparées, on obtient respectivement (2.3) et (2.4). ∎

Corollaire 5. — *On a*

$$1+\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} w_1(\sigma)\beta^{\mathrm{sig}\,\sigma} = e^{u_4\beta x}\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1e^{\alpha_2x}-\alpha_2e^{\alpha_1x}}\right)^{\beta}, \tag{2.7}$$

où $\mathrm{sig}\,\sigma$ *désigne le nombre d'éléments saillants inférieurs à gauche de* σ *et* $\alpha_1+\alpha_2 = u_3+u_4$, $\alpha_1\alpha_2 = u_1u_2$.

Démonstration. — Lorsque $\beta=1$, on retrouve (2.4). Le cas général en résulte d'après la formule exponentielle (voir [Fo-Sc]) et la transformation fondamentale. ∎

Corollaire 6. — *Soit* $\mathcal{D}_n$ *l'ensemble des permutations sans point fixe sur* $\{1,2,\ldots,n\}$. *Alors*

$$1+\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{D}_n} u_1^{\mathrm{cc}\,\sigma}u_2^{\mathrm{pic}\,\sigma}u_3^{\mathrm{dm}\,\sigma}u_4^{\mathrm{dd}\,\sigma}\beta^{\mathrm{cyc}\,\sigma} = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1e^{\alpha_2x}-\alpha_2e^{\alpha_1x}}\right)^{\beta}, \tag{2.8}$$

où $\alpha_1+\alpha_2 = u_3+u_4$ *et* $\alpha_1\alpha_2 = u_1u_2$.

Démonstration. — Par la transformation fondamentale rappelée plus haut, tout élément de $\hat{\pi}$ qui est à la fois une double descente et un élément saillant inférieur à gauche correspond de façon biunivoque à un point fixe de π. On obtient donc (2.8) en divisant (2.7) par $e^{u_4\beta x}$. ∎

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème 1. Remarquons que $e^{\alpha\beta x}$ est la fonction génératrice exponentielle des permutations dont tous les points sont fixes par rapport au fonction poids (1.1). Il se résulte du corollaire précédent que la fonction génératrice exponentielle des permutations par rapport au fonction poids (1.1) est

$$e^{\alpha\beta x}\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1 e^{\alpha_2 x}-\alpha_2 e^{\alpha_1 x}}\right)^{\beta}. \tag{2.9}$$

où $\alpha_1\alpha_2=u_1u_2$ et $\alpha_1+\alpha_2=u_3+u_4$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Pour la suite de cet article, on pose

$$h(x)=h(x;u,v,\beta)=\left(\frac{v-u}{v-ue^{(v-u)x}}\right)^{\beta}. \tag{2.10}$$

En fait, la série formelle $h(x)$ est elle-même combinatoirement intéressante. Rappelons que dans une permutation $\sigma\in\mathcal{S}_n$, un élément $x=\sigma(i)$, $1\le i\le n$ est dit une *montée de cycle* (ou excédance) de σ ssi $x<\sigma(x)$. On note $\operatorname{exc}\sigma$ le nombre des montées de cycle de σ et $\operatorname{nex}\sigma=n-\operatorname{exc}\sigma$. Le résultat suivant est dû à Carlitz et Scoville [Ca-Sc2].

Proposition 7. — *On a*

$$1+\sum_{n\ge1}\frac{x^n}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}u^{\operatorname{exc}\sigma}v^{\operatorname{nex}\sigma}\beta^{\operatorname{cyc}\sigma}=\left(\frac{v-u}{v-ue^{(v-u)x}}\right)^{\beta}. \tag{2.11}$$

Démonstration. — On remarque qu'un élément est une montée de cycle si et seulement s'il est un creux de cycle ou une double montée. La proposition en résulte donc en posant $\alpha_2=\alpha_3=u$ et $\alpha_1=\alpha_4=\alpha=v$ dans le théorème 1. □

Pour toute série formelle $a(x)=\sum_{i\ge0}a_ix^i/i!$, on note sa *transformée de Laplace formelle* par $\mathcal{L}\{a\}(x)=\sum_{i\ge0}a_ix^i$.

Lemme 8. — *On a*

$$\mathcal{L}\{h\}(x)=\sum_{n\ge0}\frac{u^n(\beta)_nx^n}{[1-(v-u)x]\cdots[1-n(v-u)x]}. \tag{2.12}$$

Démonstration. — D'après (2.10), on obtient par la formule binomiale que

$$\begin{aligned}h(x)&=\left\{1-\frac{u}{v-u}\left(e^{(v-u)x}-1\right)\right\}^{-\beta}\\&=\sum_{n\ge0}\left(\frac{u}{v-u}\right)^n\cdot\frac{(\beta)_n}{n!}(e^{(v-u)x}-1)^n\\&=\sum_{n\ge0}\left(\frac{u}{v-u}\right)^n\cdot\frac{(\beta)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\cdot e^{(n-k)(v-u)x}.\end{aligned}$$

Comme la transformée de Laplace de $e^{(n-k)(v-u)x}$ est $1/(1-(n-k)(v-u)x)$, en appliquant la transformation de Laplace à l'identité précédente, on obtient

$$\mathcal{L}\{h\}(x)=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{u}{v-u}\right)^n\cdot\frac{(\beta)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{1-(n-k)(v-u)x}. \tag{2.13}$$

Or il est facile de vérifier que

$$\frac{x^n}{(1-ax)\cdots(1-nax)}=\frac{1}{n!a^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{1-(n-k)ax}. \tag{2.14}$$

Compte tenu de (2.13) et (2.14) on obtient (2.12). □

Lemme 9. — *Soit* $a(x)=\sum_{i\geq 0}a_ix^i/i!$ *et* $b(x)=\sum_{i\geq 0}a_ix^i/i!$ *deux séries formelles telles que* $b(x)=e^{\alpha x}a(x)$. *Alors*

$$\mathcal{L}\{b\}(x)=\frac{1}{1-\alpha x}\mathcal{L}\{a\}\left(\frac{x}{1-\alpha x}\right). \tag{2.15}$$

Démonstration. — La démonstration de ce lemme est laissée au lecteur. □

D'après le théorème 1, la fonction génératrice exponentielle des μ_n peut s'écrire comme suit :

$$e^{(\alpha-\alpha_2)\beta x}h(x;\alpha_2,\alpha_1,\beta).$$

Le théorème 2 en résulte alors en vertu des lemmes 8 et 9.

De même, par application des lemmes 8 et 9 à la proposition 4, on trouve les transformées de Laplace de $U(x)$ et $V(x)$.

Proposition 10. — *On a*

$$\mathcal{L}\{U\}(x)=\frac{u_2}{\alpha_2}\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha_2^n\,n!\,x^n}{[1-(\alpha_1-\alpha_2)x][1-(\alpha_1-\alpha_2)x]\cdots[1-n(\alpha_1-\alpha_2)x]},$$
$$\mathcal{L}\{V\}(x)=-1+\frac{1}{1-(u_4-\alpha_2)x}\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha_2^n\,n!\,x^n}{\prod_{k=0}^{n}[1-(u_4+k\alpha_1-(k+1)\alpha_2)x]},$$

où $\alpha_1\alpha_2=u_1u_2$ *et* $\alpha_1+\alpha_2=u_3+u_4$.

En particulier, si l'on pose $u_1=u_2=1$ et $u_3=u_4=0$ dans la proposition 4, d'une part les polynômes générateurs $\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}w_1(\sigma)$ et $\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}w_2(\sigma)$ se réduisent respectivement aux nombres de permutations *alternantes*, *i.e*, ni doubles montées ni doubles descentes, d'ordre n impair et d'ordre n pair, d'autre part les séries $U(x)$ et $1+V(x)$ se réduisent respectivement à $\operatorname{tg}x$ et $\sec x$. On retrouve donc le résultat classique de ANDRÉ [An] sur l'interprétation combinatoire des coefficients E_n dans la série :

$$\sum_{n\geq 0} E_n \frac{x^n}{n!} = \sec x + \operatorname{tg} x.$$

A leur tour, les identités de la proposition 10 se réduisent après simplification aux formules :

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n E_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{n!\,x^n}{(1+2\,x)(1+4\,x)\cdots(1+2n\,x)}, \tag{2.16}$$

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n E_{2n}x^{2n} = \sum_{n\geq 0} \frac{n!\,x^n}{(1+x)(1+3\,x)\cdots(1+(2n+1)\,x)}. \tag{2.17}$$

3. Développement en fractions continues

On dit qu'une série formelle $a(x)$ admet une *formule d'addition* avec les paramètres $\{(p_k, q_{k+1})|k\geq 0\}$, si $a(x)$ a la propriété suivante :

$$a(x+y) = \sum_{k\geq 0} p_k f_k(x) f_k(y), \tag{3.1}$$

où p_k est indépendant de x, y et

$$f_k(x) = \frac{x^k}{k!} + q_{k+1}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + O(x^{k+2}). \tag{3.2}$$

LEMME 11 (STIELTJES - ROGERS). — *La série formelle $a(x)$ a une formule d'addition avec les paramètres $\{p_k, q_{k+1}|k\geq 0\}$, si et seulement si*

$$\mathcal{L}\{a\}(x) = \cfrac{1}{1-b_0x-\cfrac{\lambda_1x^2}{1-b_1x-\cfrac{\lambda_2x^2}{\ddots\,\overline{\;1-b_nx-\cfrac{\lambda_{n+1}x^2}{\ddots}\;}}}} \tag{3.3}$$

avec $b_n = q_{n+1} - q_n$ et $\lambda_{n+1} = p_{n+1}p_n^{-1}$ pour $n\geq 0$.

Démonstration. — Voir, par exemple, [St] et [Ro] ou [Wa, p. 203]. □

Comme conséquence immédiate du lemme précédent, on a le résultat suivant, voir aussi [Go-Ja, p. 307].

Lemme 12. — *Soit* $a(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n/n!$ *et* $b(x)=\sum_{n\geq 0} b_n x^n/n!$ *deux séries formelles telles que* $b(x)=e^{\alpha x}a(x)$. *Si* $\mathcal{L}\{a\}(x)$ *admet le développement (3.3), alors*

$$\mathcal{L}\{b\}(x)=\cfrac{1}{1-(\alpha+b_0)x-\cfrac{\lambda_1 x^2}{1-(\alpha+b_1)x-\cfrac{\lambda_2 x^2}{\cfrac{\ddots}{1-(\alpha+b_n)x-\cfrac{\lambda_{n+1}x^2}{\ddots}}}}}.$$

Démonstration. — Supposons que la série $a(x)$ satisfait (3.1) et (3.2). Donc

$$b(x+y)=e^{\alpha(x+y)}a(x+y)=\sum_{k\geq 0} p_k(e^{\alpha x}f_k(x))(e^{\alpha y}f_k(y)).$$

Comme $e^{\alpha x}f_k(x)=x^k/k!+((k+1)\alpha+q_{k+1})x^{k+1}/(k+1)!+O(x^{k+2})$, le lemme 8 en résulte alors d'après le lemme 7. $\square$

Proposition 13a. — *On a le développement suivant :*

$$\mathcal{L}\{h\}(x)=\cfrac{1}{1-\cfrac{\beta u\,x}{1-\cfrac{v\,x}{\cfrac{\ddots}{1-\cfrac{(\beta+n-1)u\,x}{1-\cfrac{nv\,x}{\ddots}}}}}}. \tag{3.4}$$

Démonstration. — Soit $f(\beta,x)=\mathcal{L}\{h\}(x;u,v,\beta)$. De (2.13) on déduit sans peine que

$$f(\beta,x)=1+\frac{u\beta x}{1-(v-u)x}f\left(\beta+1,\frac{x}{1-(v-u)x}\right). \tag{3.5}$$

Supposons que

$$f(\beta,x)=\cfrac{1}{1-\cfrac{c_1(\beta)\,x}{1-\cfrac{c_2(\beta)\,x}{1-\cfrac{c_3(\beta)\,x}{\ddots}}}}. \tag{3.6}$$

En contractant (3.6) à partir du $1^{\text{ième}}$ trait, on obtient

$$(3.7) \qquad f(\beta,x) = 1 + \cfrac{c_1(\beta)x}{1-(c_1(\beta)+c_2(\beta))x - \cfrac{c_2(\beta)c_3(\beta)\,x^2}{1-(c_3(\beta)+c_4(\beta))x - \cfrac{c_4(\beta)c_5(\beta)\,x^2}{\cdots}}}.$$

De même en contractant (3.6) à partir du $2^{\text{ième}}$ trait on obtient

$$(3.8) \qquad f(\beta,x) = \cfrac{1}{1-c_1(\beta)x - \cfrac{c_1(\beta)c_2(\beta)\,x^2}{1-(c_2(\beta)+c_3(\beta))x - \cfrac{c_3(\beta)c_4(\beta)\,x^2}{\cdots}}}.$$

Il s'en suit que

$$(3.9) \qquad \frac{u\beta x}{1-\lambda x} f\left(\beta+1, \frac{x}{1-\lambda x}\right) =$$

$$\cfrac{u\beta x}{1-(\lambda+c_1(\beta+1))x - \cfrac{c_1(\beta+1)c_2(\beta+1)x^2}{1-(\lambda+c_2(\beta+1)+c_3(\beta+1))x - \cfrac{c_3(\beta+1)c_4(\beta+1)x^2}{\cdots}}}.$$

En substituant (3.6) et (3.9) dans l'équation (3.5) avec $\lambda = v-u$ et en identifiant les coefficients des termes correspondant, on obtient successivement que

$$\begin{aligned}
&c_1(\beta) = u\beta, && \\
&c_1(\beta)+c_2(\beta) = v-u+c_1(\beta+1) && \Rightarrow c_2(\beta) = v, \\
&c_2(\beta)c_3(\beta) = c_1(\beta+1)c_2(\beta+1) && \Rightarrow c_3(\beta) = u(\beta+1), \\
&c_3(\beta)+c_4(\beta) = v-u+c_2(\beta+1)+c_3(\beta+1) && \Rightarrow c_4(\beta) = 2v, \\
&\ldots\ldots && \ldots\ldots
\end{aligned}$$

On obtient aisément la solution générale :

$$c_{2n-1}(\beta) = (\beta+n-1)u, \quad c_{2n}(\beta) = nv, \quad n \geq 1.$$

Ceci achève la démonstration. □

Par contraction, on peut réécrire (3.4) sous la forme suivante (3.10), que nous allons donner une deuxième démonstrations en utilisant directement la formule d'addition de Stieltjes et Rogers.

Proposition 13b. — *On a*

$$\mathcal{L}\{h\}(x) = \cfrac{1}{1-\beta ux - \cfrac{\beta uvx^2}{1-(u\beta+u+v)x - \cfrac{2(\beta+1)uvx^2}{\cfrac{\ddots}{1-(u\beta+n(u+v))x-\cfrac{(n+1)(\beta+n)uvx^2}{\ddots}}}}}. \tag{3.10}$$

Démonstration. — Par définition (2.11), on a

$$h(x+y) = \left\{1 - \frac{\alpha_2}{v-u}\left(e^{(v-u)(x+y)}-1\right)\right\}^{-\beta}. \tag{3.11}$$

Posons

$$\theta(x) = e^{x(v-u)} - 1 = (v-u)x + \frac{(v-u)^2x^2}{2!} + \dots,$$

on peut alors réécrire (3.11) comme suit :

$$\begin{aligned} h(x+y) &= \left\{\left(1-\frac{u\theta(x)}{v-u}\right)\left(1-\frac{u\theta(y)}{v-u}\right) - \frac{uv\theta(x)\theta(y)}{(v-u)^2}\right\}^{-\beta} \\ &= \sum_{k\geq 0} k!(\beta)_k(uv)^k f_k(x)f_k(y), \end{aligned} \tag{3.12}$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \frac{1}{k!}\frac{\theta^k(x)}{(v-u)^k}\left(1-\frac{u}{v-u}\theta(x)\right)^{-(k+\beta)} \\ &= \frac{1}{k!}\left\{x^k + \frac{k(v-u)}{2}x^{k+1}+\cdots\right\}\{1+u(k+\beta)x+\cdots\} \\ &= \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\left\{\frac{k(u+v)+2u\beta}{2}\right\}(k+1) + O(x^{k+2}). \end{aligned} \tag{3.13}$$

On tire donc de (3.11) et (3.13) la formule d'addition pour $h(x)$ avec les paramètres $\{(p_k, q_{k+1}) | k \geq 0\}$ où

$$p_k = k!(\beta)_k(uv)^{k+1}, \quad q_{k+1} = u\beta(k+1) + \frac{k(k+1)}{2}(u+v).$$

Il s'en suit que

$$q_{k+1} - q_k = u\beta + k(u+v), \quad p_{k+1}p_k^{-1} = (k+1)(\beta+k)uv.$$

Le lemme 9 en résulte en vertu du lemme 7. □

D'après le théorème 1, on sait que la fonction génératrice exponentielle des μ_n est

$$e^{(\alpha-\alpha_2)\beta x} h(x; \alpha_2, \alpha_1; \beta).$$

Le théorème 3 en résulte donc d'après le lemme 8 et la proposition 13b.

4. Remarques

Les autres J-fractions continues obtenues par des moyens combinatoires dans [Fl] pourraient aussi être établies par la même méthode classique illustrée plus haut. Par exemple, comme $\mathcal{L}\{U\}(x) = x\mathcal{L}\{U'\}(x)$ et

$$U'(x) = u_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1 e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}} \right)^2. \tag{4.1}$$

D'autre part, d'après le théorème 1 et la proposition 4, la série $1 + \mathcal{L}\{V\}(x)$ est un cas particulier de $1 + \sum_{n\geq 1} \mu_n x^n$, on en déduit donc de façon analogue le résultat suivant, qui correspond essentiellement aux théorèmes 3A et 3B de [Fl2].

Théorème 14. — *Les transformées de Laplace de $U(x)$ et $V(x)$ admettent les dévelopements en fractions continues suivants* :

$$\mathcal{L}\{U\}(x) = \cfrac{u_2 x}{1 - (u_3+u_4)x - \cfrac{1 \cdot 2 u_1 u_2 x^2}{1 - 2(u_3+u_4)x - \cfrac{2 \cdot 3 u_1 u_2 x^2}{\cfrac{\ddots}{1 - (n+1)(u_3+u_4)x - \cfrac{(n+1)(n+2) u_1 u_2 x^2}{\ddots}}}}},$$

$$\mathcal{L}\{V\}(x) = \cfrac{1}{1 - u_4 x - \cfrac{1^2 \cdot u_1 u_2 x^2}{1 - (u_3+2u_4)x - \cfrac{2^2 \cdot u_1 u_2 x^2}{\cfrac{\ddots}{1 - (u_3 + n(u_3+u_4))x - \cfrac{(n+1)^2 \cdot u_1 u_2 x^2}{\ddots}}}}}.$$

Enfin, il est bien connu que l'évaluation du déterminant de Hankel d'une suite donnée est liée au développement en fraction continue de sa fonction génératrice ordinaire (Voir [Ch, Vi]). Par exemple, on déduit immédiatement du théorème 10 que le déterminant de Hankel construit sur μ_n a pour expression explicite suivante :

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \{(n-i+1)(\beta+n-i)u_1u_2\}^i . \tag{4.2}$$

En particulier, si l'on pose $\alpha = z-1$, $\beta = 1$ et $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = z$, on trouve alors $\mu_n = z^n \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}(1-1/z)^{\mathrm{fix}\,\sigma} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i n! z^{n-i}/i!$ et l'identité (4.2) se réduit à une formule récemment établie par Radoux [Ra].

BIBLIOGRAPHIE

[**An**] André (D.). — *Développements de* $\sec x$ *et de* $\tan x$, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **88**, 1879, p. 965–967.

[**Ca-Sc1**] Carlitz (L.) and Scoville (R.). — *Generalized Eulerian numbers : combinatorial applications*, J. Reine Angew. Math., t. **265**, 1974, p. 110–137.

[**Ca-Sc2**] Carlitz (L.) and Scoville (R.). — *Some Permutation Problems*, J. Combin. Th., t. **(2) 22**, 1977, p. 129–145.

[**Ch**] Chihara (T.). — *An introduction to orthogonal polynomials.* — Gordon and Breach, New York, London, Paris, 1978.

[**Fl1**] Flajolet (P.). — *Analyse d'algorithmes de manipulations d'arbres et de fichiers*, Cahiers du BURO, t. **34-35**, 1981, p. 1–209.

[**Fl2**] Flajolet (P.). — *Combinatorial aspects of continued fractions*, Disc. Math., t. **41**, 1982, p. 145–153.

[**Fo-Sc**] Foata (D.) et Schüzenberger (M.). — *Théorie géométrique des polynômes Eulériens.* — Lecture Notes in Math., Vol. 138, Springer Verlag, 1970.

[**Fo-St**] Foata (D.) and Strehl (V.). — Euler numbers and Variations of Permutations, in *Atti Dei Convegni Lincei* 17, Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatoire (1973), Tomo I, Roma, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976, p. 119–131.

[**Fr-Vi**] FRANÇON (J.) et VIENNOT (G.). — *Permutations selon les pics, creux, doubles montées, doubles descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi*, Disc. Math., t. **28**, 1979, p. 21–35.

[**Go-Ja**] GOULDEN (I. P.) and JACKSON (D. M.). — *Combinatorial enumeration.* — Wiley, New York, 1983.

[**Ra**] RADOUX (C.). — *Déterminant de Hankel construit sur des polynômes liés aux Nombres de Dérangements*, Europ. J. Combinatorics, t. **12**, 1991, p. 327–329.

[**Ro**] ROGERS (L.). — *On the representation of certain asymptotic series as continued fractions*, Proc. Lond. Math. Soc., t. **(2) 4**, 1907, p. 72–89.

[**St**] STIELTJES (T. J.). — *Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes d'une variable*, Ann. Fac. Sc. Toulouse, t. **3**, 1889, p. 1–17.

[**Vi**] VIENNOT (G.). — *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, Lecture Notes, 1983.

[**Wa**] WALL (H. S.). — *Analytic Theory of Continued Fractions.* — Chelsea, New-York, 1967.

[**Ze**] ZENG (J.). — *Weighted derangements and the linearization coefficients of orthogonal Sheffer polynomials*, Proc. London Math. Soc., t. **(3) 65**, 1992, p. 1–22.

Département de Mathématiques
Université Louis-Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France