# Un autre $q$-analogue des nombres d'Euler

G.-N. Han[1], A. Randrianarivony[2] et J. Zeng[3]

[1]IRMA, CNRS et Université Louis-Pasteur (Strasbourg 1), France
[2] Faculté des Sciences, Université d'Antananarivo, Madagascar
[3]Institut Girard Desargues, Université Claude Bernard (Lyon 1), France

*Dedicated to G. Andrews on the occasion of his 60th birthday*

**Abstract**

The ordinary generating functions of the secant and tangent numbers have very simple continued fraction expansions. However, the classical $q$-secant and $q$-tangent numbers do not give a natural $q$-analogue of these continued fractions. In this paper, we introduce a different $q$-analogue of Euler numbers using $q$-difference operator and show that their generating functions have simple continued fraction expansions. Furthermore, by establishing an explicit bijection between some Motzkin paths and $(k, r)$-multipermutations we derive combinatorial interpretations for these $q$-numbers. Finally the allied $q$-Euler median numbers are also studied.

## 1 Introduction

Les *nombres d'Euler* $E_n$ $(n \geq 0)$ sont classiquement définis comme les coefficients apparaissant dans le développement de Taylor suivant :

$$\sum_{n\geq 0} E_n \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + 2\,\frac{t^3}{3!} + 5\,\frac{t^4}{4!} + \ldots = \frac{1}{\cos t} + \tan t. \tag{1}$$

Ainsi les nombres $E_{2n}$ et $E_{2n+1}$ sont appelés aussi *nombres sécants* et *nombres tangents* respectivement. En remplaçant $\cos t$ et $\tan t$ par leurs $q$-analogues dans (1) on obtient alors le $q$-analogue classique des nombres d'Euler comme les coefficients correspondants dans le développement en $q$-séries de Taylor. Ces $q$-nombres d'Euler généralisent effectivement certains aspects arithmétiques et combinatoires des nombres d'Euler [2, 3, 10], mais ils ne fournissent pas de $q$-analogues simples pour deux S-fractions continues remarquables de leurs séries génératrices ordinaires [8] :

$$\sum_{n\geq 0} E_{2n}t^n = 1+t+5\ t^2+61\ t^3+\ldots = \cfrac{1}{1-\cfrac{1^2\,t}{1-\cfrac{2^2\,t}{1-\cfrac{3^2\,t}{\ddots}}}}, \tag{2}$$

$$\sum_{n\geq 0} E_{2n+1}t^n = 1+2\ t+16\ t^2+272\ t^3+\ldots = \cfrac{1}{1-\cfrac{1\cdot 2\,t}{1-\cfrac{2\cdot 3\,t}{1-\cfrac{3\cdot 4\,t}{\ddots}}}}. \tag{3}$$

Une autre suite de nombres liés intimement aux nombres sécants et tangents est la suite des *nombres d'Euler médians* $L_n$, qui sont les nombres apparaissant au milieu du triangle *de Seidel-Arnold* [4, 7]:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \mathbf{1} & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & \leftarrow & & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & \rightarrow & & \mathbf{1} & & \rightarrow & 1 & & & & \\
 & & & 2 & \leftarrow & 2 & & \leftarrow & & 1 & \leftarrow & 0 & & & \\
 & & 0 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & & \mathbf{4} & & \rightarrow & 5 & \rightarrow & 5 & & \\
 & 16 & \leftarrow & 16 & \leftarrow & 14 & & \leftarrow & & 10 & \leftarrow & 5 & \leftarrow & 0 & \\
0 & \rightarrow & 16 & \rightarrow & 32 & \rightarrow & & \mathbf{46} & & \rightarrow & 56 & \rightarrow & 61 & \rightarrow & 61 \\
 & & & & & & & \cdots\cdots & & & & & & &
\end{array}$$

dont la construction est analogue à celle du *triangle de Pascal* pour les coefficients binomiaux. Par exemple, on trouve les premières valeurs de ces nombres : $L_0 = 1$, $L_1 = 1$, $L_2 = 4$, $L_3 = 46$, ainsi que celles des nombres d'Euler : $E_0 = E_2 = 1, E_4 = 5, E_6 = 61$ et $E_1 = 1, E_3 = 2, E_5 = 16$. Dumont [7] a montré que la fonction génératrice des nombres $L_n$ a aussi un développement simple en S-fraction continue :

$$\sum_{n\geq 0} L_nt^n = 1+t+4\ t^2+46\ t^3+1024\ t^4+\ldots = \cfrac{1}{1-\cfrac{1\cdot 1\,t}{1-\cfrac{1\cdot 3\,t}{1-\cfrac{2\cdot 5\,t}{1-\cfrac{2\cdot 7\,t}{\ddots}}}}}. \tag{4}$$

Il s'avère [17, 18] qu'une telle formule pour une suite de nombres est généralement liée à une *formule de type Gandhi* de ces nombres. Plus précisément, soit $\alpha = (a, b, c, d)$ une suite d'entiers rationnels et $P_n^{(\alpha)}(x)$ $(n \geq 0)$ une suite de polynômes définis par

$$\begin{cases} P_0^{(\alpha)}(x) = 1, \\ P_n^{(\alpha)}(x) = (x+a)\left\{(x+b)P_{n-1}^{(\alpha)}(x+c) - (x+d)P_{n-1}^{(\alpha)}(x)\right\}. \end{cases} \tag{5}$$

Par la méthode de [17, 18], on obtient aisément le résultat suivant:

$$\sum_{n\geq 0} P_n^{(\alpha)}(x)t^n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{(b-d)(x+a)\,t}{1 - \cfrac{c(x+b)\,t}{1 - \cfrac{(b-d+c)(x+a+c)\,t}{1 - \cfrac{2c(x+b+c)\,t}{1 - \cfrac{(b-d+2c)(x+a+2c)\,t}{1 - \cfrac{3c(x+b+2c)\,t}{\ddots}}}}}}}. \tag{6}$$

D'où, par comparaison de leurs fractions continues, on déduit que

$$E_{2n+1} = P_n^{(1,2,2,1)}(1), \quad E_{2n} = P_n^{(0,1,2,0)}(1), \quad L_n = 4^{-n}P_n^{(0,2,4,-2)}(1). \tag{7}$$

Par ailleurs, les polynômes $P_n^{(\alpha)}(x)$ interpolent les trois autres suites de nombres $(R_n)$, $(l_n)$ et $(r_n)$ proposées dans [7, 18] par les ressemblances de leurs fractions continues à celles des nombres d'Euler médians:

$$R_n = 4^{-n}P_n^{(2,4,4,0)}(1), \quad l_n = 2^{-n}P_n^{(0,1,2,-1)}(1), \quad r_n = 2^{-n}P_n^{(1,2,2,0)}(1). \tag{8}$$

Les premières valeurs de ces nombres sont : $R_0 = 1$, $R_1 = 3$, $R_2 = 24$, $R_3 = 402$, $l_0 = 1$, $l_1 = 1$, $l_2 = 3$, $l_3 = 21$ et $r_0 = 1$, $r_1 = 2$, $r_2 = 10$, $r_3 = 98$.

L'un des avantages d'une formule de type (5) est qu'elle ouvre une nouvelle voie pour des $q$-extensions en remplaçant la *différence ordinaire* par la *$q$-différence*. Ce qui a d'ailleurs été fructueux dans l'étude de $q$-nombres de Genocchi [13]. Le but de cet article est d'étudier le $q$-analogue des nombres plus haut dans cette optique.

Pour tout entier *positif* ou *négatif* de $n$, on définit son $q$-analogue $[n]$ par

$$[n] := [n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{et} \quad [x,n]_q = xq^n + [n]. \tag{9}$$

Pour $n \geq 0$, on définit le $q$-analogue de (5) les polynômes $P_n^{(\alpha)}(x,q)$ par

$$\begin{cases} P_0^{(\alpha)}(x,q) = 1, \\ P_n^{(\alpha)}(x,q) = [x,a]_q \dfrac{[x,b]_q P_{n-1}^{(\alpha)}([x,c]_q, q) - [x,d]_q P_{n-1}^{(\alpha)}(x,q)}{1+(q-1)x}. \end{cases} \tag{10}$$

Pour des entiers positifs $r \geq l \geq 0$, on note [12, p.73] l'ensemble des entiers compris entre $l$ et $r$ par

$$[l..r] = \{l, l+1, \ldots, r-1, r\}. \tag{11}$$

**Définition 1** Soient $k$ et $r$ deux entiers naturels. Une $(k,r)$-multipermutation ou $(k,r)$-MP de $[1..n]$ est un réarrangement du mot $0^k 1^r 2^r \cdots n^r$ tel qu'entre deux lettres identiques, il n'y a aucune lettre plus petite. On note $\mathrm{S}_n^{(k,r)}$ l'ensemble des $(k,r)$-multipermutations de $[1..n]$.

**Remarque:** Si $k=0$, une $(k,r)$-MP se réduit à une $r$-*multipermutation* de $[1..n]$, qui a été introduite par Gessel et Stanley [11] et poursuivie par Park [15]. Si $r=1$, une $(k,r)$-MP de $[1..n]$ s'appelle simplement $k$-*permutation* de $[1..n]$. On s'aperçoit assez facilement que le cardinal de $\mathrm{S}_n^{(k,r)}$ a une formule explicite :

$$|\,\mathrm{S}_n^{(k,r)}\,| = (k+1)\cdot(k+1+r)\cdots(k+1+r(n-1)).$$

Il en résulte que

$$\sum_{n\geq 0} |\,\mathrm{S}_n^{(k,r)}\,| \frac{x^n}{n!} = (1-rx)^{-(k+1)/r},$$

ainsi (voir [8]) que

$$\sum_{n\geq 0} |\,\mathrm{S}_n^{(k,r)}\,| t^n = \cfrac{1}{1-(k+1)t - \cfrac{r(k+1)t^2}{1-(k+1+2r)t - \cfrac{2r(k+1+r)t^2}{\cfrac{\ddots}{1-b_i t - \cfrac{\lambda_i t^2}{\ddots}}}}} \tag{12}$$

où $b_i = k+1+2ir$ et $\lambda_i = r(i+1)(k+1+ir)$ pour $i \geq 0$.

En vertu de la théorie combinatoire des $J$-fractions continues [8], on en déduit l'existence d'une bijection de $\mathrm{S}_n^{(k,r)}$ sur un certain ensemble de *chemins de Motzkin valués* (voir Section 3). Nous allons construire une telle bijection $\Theta_n$ en généralisant la bijection classique de Françon-Viennot-Flajolet (voir [8]), qui correspond au cas où $r = 1$.

Cet article est organisé comme suit. Dans la section 2 on calcule d'abord la série génératrice ordinaire de $P_n^{(\alpha)}(x,q)$ $(n \geq 0)$ et puis définit des $q$-extensions des nombres et des polynômes introduits plus haut. La section 3 est consacrée à la construction de la bijection $\Theta_n$. En appliquant la théorie combinatoire générale des fractions continues, on en déduit des interprétations combinatoires de ces polynômes dans la section 4. Enfin on termine l'article par des liens avec les nombres de Genocchi.

## 2 Fractions continues et définitions

Posons $\Delta_q x = 1 + (q-1)x$ et $P(x,t) = \sum_{n\geq 0} P_n^{(\alpha)}(x,q)t^n$. La récurrence (10) equivaut alors à l'équation fonctionnelle suivante :

$$P(x,t) = \frac{\Delta_q x}{\Delta_q x + [x,a]_q[x,d]_q t} + \frac{[x,a]_q[x,b]_q t}{\Delta_q x + [x,a]_q[x,d]_q t} \cdot P([x,c]_q,t). \tag{13}$$

Comme $1 + (q-1)[x,c]_q = q^c \Delta_q x$ et $[[x,c]_q,a]_q = [x,a+c]_q$, on en déduit par itération le résultat suivant.

**Proposition 1** *On a*

$$\sum_{n\geq 0} P_n^{(\alpha)}(x,q)t^n = \sum_{n\geq 0} \frac{q^{nc}t^n \Delta_q x \prod_{i=0}^{n-1}[x,a+ic]_q[x,b+ic]_q}{\prod_{i=0}^{n}\{q^{ic}\Delta_q x + [x,a+ic]_q[x,d+ic]_q t\}}. \tag{14}$$

Comme dans [13, 17, 18], on obtient le développement en fraction continue de $P(x,t)$ en appliquant une formule de Wall [20] à (13).

**Théorème 1** *La fonction génératrice ordinaire des polynômes $P_n^{(\alpha)}(x,q)$ admet le développement en S-fraction continue suivant :*

$$\sum_{n\geq 0} P_n^{(\alpha)}(x,q)t^n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{q^d[b-d][x,a]_q\,t}{1 - \cfrac{q^a[c][x,b]_q\,t}{1 - \cfrac{q^d[b-d+c][x,a+c]_q\,t}{1 - \cfrac{q^a[2c][x,b+c]_q\,t}{1 - \cfrac{q^d[b-d+2c][x,a+2c]_q\,t}{1 - \cfrac{q^a[3c][x,b+2c]_q\,t}{\ddots}}}}}}}.$$

**Remarque:** Le théorème ci-dessus a été découvert à l'aide de Maple. En effet, la formule de Wall (voir [13, 17, 18]) fournit une relation de récurrence pour les coefficients de la $S$-fraction continue, qui permet de calculer les premiers coefficients rapidement à l'aide de Maple dans des cas particuliers.

Pour des entiers positifs $k$ et $r$, posons

$$E_n^{(k,r)}(x,q) = q^{-(k-1)n} P_n^{(k-1,k-1+r,2r,k-1)}(x,q). \tag{15}$$

Il vient du théorème 1 que

$$\sum_{n\geq 0} E_n^{(k,r)}(x,q)t^n = \cfrac{1}{1-\cfrac{[r][x,k-1]_q\, t}{1-\cfrac{[2r][x,k-1+r]_q\, t}{1-\cfrac{[3r][x,k-1+2r]_q\, t}{1-\cfrac{[4r][x,k-1+3r]_q\, t}{\ddots}}}}}. \tag{16}$$

Rappelons que les nombres d'Euler d'ordre $k$ sont définis par

$$\sum_{n\geq 0} E_{2n}^{(k)} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{(\cos t)^k}.$$

Comparant avec le développement en $S$-fraction continue de la série génératrice de $E_{2n}^{(k)}$ (voir [8]), on voit que

$$E_{2n}^{(k)} = E_n^{(k,1)}(1,1).$$

Il est donc naturel de définir $E_n^{(k,r)}(x,q)$ comme les $q$-polynômes d'Euler d'ordre $k$. En vertu de (7), on définit les $q$-polynômes sécants $S_n(x,q)$ et les $q$-polynômes tangents $T_n(x,q)$ par

$$S_n(x,q) = E_n^{(1,1)}(x,q), \quad T_n(x,q) = E_n^{(2,1)}(x,q). \tag{17}$$

On a donc les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} S_n(x,q)t^n &= 1 + x\ t + x([2]+[3]x)\ t^2 + \dots \\ &= \cfrac{1}{1-\cfrac{[1]x\, t}{1-\cfrac{[2][x,1]_q\, t}{1-\cfrac{[3][x,2]_q\, t}{1-\cfrac{[4][x,3]_q\, t}{\ddots}}}}},\end{aligned} \tag{18}$$

$$\sum_{n\geq 0} T_n(x,q)t^n = 1+(1+qx)\,t+(1+qx)([2]+[3](1+qx))\,t^3+\ldots$$

$$= \cfrac{1}{1-\cfrac{[1][x,1]_q\,t}{1-\cfrac{[2][x,2]_q\,t}{1-\cfrac{[3][x,3]_q\,t}{1-\cfrac{[4][x,4]_q\,t}{\ddots}}}}}. \tag{19}$$

A leurs tours, en définissant les $q$-nombres sécants $E_{2n}(q) = S_n(1,q)$ et les $q$-nombres tangents $E_{2n+1}(q) = T_n(1,q)$ $(n \geq 0)$, on obtient les $q$-analogues de (2) et (3) comme suit :

$$\sum_{n\geq 0} E_{2n}(q)t^n = 1+t+(2+2q+q^2)t^2+(5+12q+16q^2+14q^3$$

$$+9q^4+4q^5+q^6)t^3+\ldots$$

$$= \cfrac{1}{1-\cfrac{[1]^2\,t}{1-\cfrac{[2]^2\,t}{1-\cfrac{[3]^2\,t}{1-\cfrac{[4]^2\,t}{\ddots}}}}}, \tag{20}$$

$$\sum_{n\geq 0} E_{2n+1}(q)t^n = 1+(1+q)\,t+2(2+q+q^2)(1+q)^2\,t^2+(5+6q$$

$$+9q^2+6q^3+5q^4+2q^5+q^6)(1+q)^3\,t^3\ldots$$

$$= \cfrac{1}{1-\cfrac{[1][2]\,t}{1-\cfrac{[2][3]\,t}{1-\cfrac{[3][4]\,t}{1-\cfrac{[4][5]\,t}{\ddots}}}}}. \tag{21}$$

Le résultat suivant est comparable avec ceux obtenus par Andrews, Foata et Gessel [2, 3, 10] pour les nombres $q$-secants et $q$-tangents classiques.

**Proposition 2** *Pour $n \geq 0$, on a $E_{2n}(q) \equiv 1 \bmod (1+q)^2$ et $E_{2n+1}(q) = (1+q)^n Q_n(q)$, où $Q_n(q)$ est un polynôme à coefficients entiers positifs de $q$ tel que $Q_n(-1) = (-1)^n n!$.*

**Démonstration:** Comme dans [9, 14], on obtient de (20) que

$$\sum_{n\geq 0} E_{2n}(q)t^n \equiv \frac{1}{1-t} \pmod{(1+q)^2}.$$

D'où $E_{2n}(q) \equiv 1 \bmod (1+q)^2$. Posons $E_{2n+1}(q) = (1+q)^n Q_n(q)$. Comme $[2n]_q/(1+q) = [n]_{q^2}$, il vient de (21) que

$$\sum_{n\geq 0} Q_n(q)t^n \quad = \quad \cfrac{1}{1-\cfrac{[1][1]_{q^2}\,t}{1-\cfrac{[1]_{q^2}[3]\,t}{1-\cfrac{[3][2]_{q^2}\,t}{1-\cfrac{[2]_{q^2}[5]\,t}{\ddots}}}}}. \tag{22}$$

Donc $Q_n(q)$ est un polynôme de $q$ à coefficients entiers positifs. Comme $[2n+1]_{-1} = 1$ et $[n]_1 = n$, en posant $q = -1$ dans (22), on obtient

$$\sum_{n\geq 0} Q_n(-1)t^n = \cfrac{1}{1+\cfrac{1\,t}{1+\cfrac{1\,t}{1+\cfrac{2\,t}{1+\cfrac{2\,t}{1+\cfrac{3\,t}{1+\cfrac{3\,t}{\ddots}}}}}}}. \tag{23}$$

D'où $Q_n(-1) = (-1)^n n!$. $\square$

Posons maintenant

$$L_n^{(k,r)}(x,q) = (q^{k-r}[2r]_q)^{-n} P_n^{(k,k+r,2r,k-r)}(x,q). \tag{24}$$

Comme $[2nr]/[2r] = [n]_{q^{2r}}$, on déduit du théorème 1 que

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} L_n^{(k,r)}(x,q)t^n \quad &= \quad 1 + [x,k]\ t + [x,k]([x,k] + q^r[x,k+r])\ t^2 + \ldots \\ &= \cfrac{1}{1-\cfrac{[x,k]_q\,t}{1-\cfrac{q^r[x,k+r]_q\,t}{1-\cfrac{[2]_{q^{2r}}[x,k+2r]_q\,t}{1-\cfrac{q^r[2]_{q^{2r}}[x,k+3r]_q\,t}{1-\cfrac{[3]_{q^{2r}}[x,k+4r]_q\,t}{\ddots}}}}}}. \end{aligned}\tag{25}$$

En vertu des relations (7) et (8), on appelle $L_n^{(k,r)}(x,q)$ les $q$-polynômes d'Euler médians généraux. En définissant les deux types de $q$-nombres d'Euler médians $L_n(q) = L_n^{(0,2)}(1,q)$ et $R_n(q) = L_n^{(2,2)}(1,q)$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} L_n(q)t^n &= 1 + t + [4]\ t^2 + (1 + 3q^2 + 4q^3 + 6q^4 + 5q^5 + 7q^6 \\ &\quad +6q^7 + 5q^8 + 3q^9 + 3q^{10} + 2q^{11} + q^{12})t^3 + \dots \\ &= \cfrac{1}{1 - \cfrac{[1]\,t}{1 - \cfrac{q^2[3]\,t}{1 - \cfrac{[2]_{q^4}[5]\,t}{1 - \cfrac{q^2[2]_{q^4}[7]\,t}{\ddots}}}}},\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} R_n(q)t^n &= 1 + [3]\ t + [3](q^2 + [7])\ t^2 + [3](1 + 2q + 6q^2 + 8q^3 \\ &\quad +11q^4 + 12q^5 + 15q^6[3] + 12q^9 + 11q^{10} \\ &\quad +9q^{11} + 7q^{12} + 4q^{13} + 3q^{14} + 2q^{15} + q^{16})t^3 + \dots \\ &= \cfrac{1}{1 - \cfrac{[3]\,t}{1 - \cfrac{q^2[5]\,t}{1 - \cfrac{[2]_{q^4}[7]\,t}{1 - \cfrac{q^2[2]_{q^4}[9]\,t}{\ddots}}}}}.\end{aligned} \tag{27}$$

De même, en définissant les $q$-analogues des nombres $l_n$ et $r_n$ respectivement par $l_n(q) = L_n^{(0,1)}(1,q)$ et $r_n(q) = L_n^{(1,1)}(1,q)$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} l_n(q)t^n &= 1 + t + [3]\ t^2 + [3](1 + 2q + 2q^2 + q^3 + q^4))\ t^3 + \dots \\ &= \cfrac{1}{1 - \cfrac{[1]\,t}{1 - \cfrac{q[2]\,t}{1 - \cfrac{[2]_{q^2}[3]\,t}{1 - \cfrac{q[2]_{q^2}[4]\,t}{\ddots}}}}},\end{aligned} \tag{28}$$

$$\sum_{n\geq 0} r_n(q)t^n = 1 + (1+q)\ t + [2](1 + 2q + q^2 + q^3)\ t^2 + \dots$$

$$= \cfrac{1}{1-\cfrac{[2]\,t}{1-\cfrac{q[3]\,t}{1-\cfrac{[2]_{q^2}[4]\,t}{1-\cfrac{q[2]_{q^2}[5]\,t}{\ddots}}}}}. \tag{29}$$

**Remarque:** On peut exprimer les fonctions génératrices de toutes les suites ci-dessus en *séries de faculté* en spécialisant (14). Par contre le calcul de fonctions génératrices exponentielles des suites ci-dessus est un problème ouvert.

## 3 Construction de la bijection $\Theta_n$

Soit $\sigma = x_1 x_2 \cdots x_{rn+k}$ une $(k, r)$-MP de $[1..n]$. Il est clair que $\sigma$ peut s'écrire de façon unique comme suit :

$$\sigma = 0^{m_1}\, w_1\, 0^{m_2}\, w_2 \cdots 0^{m_l}\, w_l\, 0^{m_{l+1}}, \tag{30}$$

où chaque $m_i$ est un entier strictement positif, sauf peut-être $m_1$ et $m_{l+1}$ qui peuvent être nuls, et chaque $w_j$ est un sous-mot maximal non vide de $\sigma$ formé de lettres non nulles. Notons que si une lettre $x$ apparaît dans le sous-mot $w_j$ $(1 \le j \le l)$, alors toutes les $r$ lettres $x$'s s'y trouvent. Il s'ensuit que $w_j$ est de longueur multiple de $r$.

**Lemme 1** *Soit $w_j = x_f x_{f+1} \cdots x_{f+rh-1}$ avec $h > 0$ un sous mot maximal de $\sigma$ ne contenant pas de lettre 0 et $\widehat{w}_j = x_f x_{f+r} \ldots x_{f+r(h-1)}$ le mot obtenu en supprimant toutes les lettres $x_i$ dans $w_j$ telles que $i \not\equiv f \bmod r$. Alors les lettres dans $\widehat{w}_j$ sont toutes distinctes.*

**Démonstration:** En effet, supposons que $i$ et $i'$ $(i < i')$ sont deux plus petits entiers tels que $x_{f+ri} = x_{f+ri'}$. Alors les lettres entre $x_{f+ri}$ et $x_{f+ri'}$ dans $w_j$ sont plus grandes que $x_{f+ri}$ et par suite toutes les lettres qui leur sont identiques s'y trouvent aussi. Donc le nombre de ces lettres, i.e., $r(i' - i) - 1$, doit être multiple de $r$, ce qui est absurde. $\square$

Il s'ensuit que si l'on substitue dans (30) chaque $w_j$ par $\widehat{w}_j$, on obtient la $k$-permutation *associée* à $\sigma$:

$$\hat{\sigma} = 0^{m_1}\, \widehat{w}_1\, 0^{m_2}\, \widehat{w}_2 \cdots 0^{m_l}\, \widehat{w}_l\, 0^{m_{l+1}}. \tag{31}$$

Pour chaque $i \in [1..n]$, on numérote les $r$ lettres $i$'s dans $\sigma$ de gauche à droite. Si la $s$-ième $i$ est retenue dans $\widehat{w}_j$, on pose

$$\epsilon(\sigma, i) = s - 1, \qquad \delta(\sigma, i) = m_{j+1} + \cdots + m_{l+1}. \tag{32}$$

**Définition 2** La $m$-ième lettre $x_m$ de $\sigma$ est un élément saillant inférieur gauche de $\sigma$ si $x_m \neq 0$ et si toute lettre à gauche de $x_m$ est plus grande que $x_m$. On note $\mathrm{sig}(\sigma)$ le nombre d'éléments saillants inférieurs gauches de $\sigma$. Supposons de plus que $x_m$ est dans le sous-mot $\widehat{w}_j$ (*resp.* dans $w_j$), on dit que $x_m$ est un élément localement saillant inférieur gauche de $\hat{\sigma}$ (*resp.* $\sigma$) si toute lettre à gauche de $x_m$ dans $\widehat{w}_j$ (*resp.* dans $w_j$) est plus grande que $x_m$.

**Lemme 2** *Si $x_m$ est un élément localement saillant inférieur gauche de $\hat{\sigma}$, alors $\epsilon(\sigma, x_m) = 0$.*

**Démonstration:** Supposons que $x_m$ est dans $w_j = x_f x_{f+1} \cdots x_{f+rh-1}$ $(h > 0)$ et $m = f + ri$. Si $\epsilon(\sigma, x_{f+ri}) \neq 0$, on a $i > 0$. Soit $s$ le plus petit entier $\geq f$ tel que $x_s = x_{f+ri}$. Il existe un unique entier $h \in [0..i-1]$ tel que $f + rh < s < f + r(h+1)$. Comme les lettres distinctes $x_f, x_{f+r}, \ldots, x_{f+rh}$ sont plus grandes que $x_s$, toutes les lettres qui leur sont identiques se trouvent à gauche de $x_s$. Il y a donc au moins $r(h+1) - 1$ lettres entre $x_f$ et $x_s$; ce qui contredit l'inégalité $s < f + r(h+1)$. □

**Définition 3** Soit $\hat{\sigma}$ une $k$-permutation de $[1..n]$ et $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ une suite d'entiers de $[0..r-1]$. On dit que $\epsilon$ est $r$-compatible avec $\hat{\sigma}$ si $\epsilon_i = 0$ pour tout $i$ localement saillant inférieur gauche de $\hat{\sigma}$.

**Lemme 3** *Etant données une $k$-permutation $\hat{\sigma}$ de $[1..n]$ et une suite $r$-compatible $(\epsilon_1, .., \epsilon_n)$ avec $\hat{\sigma}$, il existe une seule $(k, r)$- MP $\sigma$ de $[1..n]$ associée à $\hat{\sigma}$ telle que $\epsilon(\sigma, i) = \epsilon_i$ pour tout $i \in [1..n]$.*

**Démonstration:** On procède par récurrence sur $n$. Pour $n = 1$, soit $\hat{\sigma} = 0^{m_1} 1\ 0^{m_2}$ où $m_1 + m_2 = k$ et $\epsilon_1 = 0$. Alors $\sigma = 0^{m_1} 1^r 0^{m_2}$ est la seule $(k, r)$-MP de $[1..n]$ associée à $\hat{\sigma}$. Supposons le lemme vrai à l'ordre $n$. Soit $\hat{\sigma}$ une $k$-permutation de $[1..n+1]$ et $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n+1})$ une suite $r$-compatible. Il est évident que $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ est une suite $r$-compatible avec la restriction $\hat{\sigma}'$ de $\hat{\sigma}$ sur $[1..n]$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une seule $(k, r)$-MP $\sigma'$ de $[1..n]$ associée à $\hat{\sigma}'$ telle que $\epsilon(\sigma', i) = \epsilon_i$ pour tout $i \in [1..n]$. S'il y a $s$ lettres non nulles et $t$ lettres nulles avant la lettre $n+1$ dans $\hat{\sigma}$, on construit le mot $\sigma$ en insérant le mot $(n+1)^r$ après la $(rs+t-\epsilon_{n+1})$-ième lettre de $\sigma'$. On voit que $\epsilon(\sigma, n+1) = \epsilon_{n+1}$ et que l'unicité de $\sigma'$ implique celle de $\sigma$. $\square$

Nous aurons encore besoin de quelques notions supplémentaires. Toute $k$-permutation $\hat{\sigma}$ peut se décomposer en *blocs* tels que chaque bloc soit un sous-mot maximal de $\hat{\sigma}$ constitué soit de lettres toutes nulles (bloc nul), soit de lettres non nulles formant une suite croissante. La première et la dernière lettre d'un bloc non nul qui ne se réduit pas à un singleton sont appelées respectivement *creux* et *pic* de $\hat{\sigma}$; les autres lettres d'un tel bloc sont appelées *doubles montées* de $\hat{\sigma}$. Une lettre non nulle formant un bloc singleton est appelée *double descente.*

Comme dans [5], on dit qu'une lettre $i$ de $\hat{\sigma}$ est embrassée à gauche (*resp.* à droite) par un bloc si $i$ est encadré par la première et la dernière lettre de ce bloc qui se trouve à gauche (*resp.* à droite) de $i$. On note $\mathrm{res}(\hat{\sigma}, i)$ (*resp.* $\mathrm{les}(\hat{\sigma}, i)$) le nombre de blocs de $\hat{\sigma}$ embrassant $i$ et se trouvant à sa droite (resp. à sa gauche).

**Exemple:** Soit $\sigma = 3\,4\,6\,6\,6\,4\,4\,3\,3\,0\,0\,1\,5\,5\,5\,1\,7\,7\,7\,1\,0\,2\,2\,2\,0$. Alors $\sigma$ est une $(4,3)$- MP sur $[1..7]$ et $\hat{\sigma} = 3\,6\,-\,4\,-\,0\,0\,-\,1\,5\,7\,-\,0\,-\,2\,-\,0$, où les blocs sont séparés par un trait $-$. Il en résulte que $\hat{\sigma}$ a deux creux $1, 3$; deux pics $6, 7$; une double montée $5$; deux doubles descentes $2, 4$. Les statistiques définies ci-dessus de $\sigma$ sont consignées dans le tableau suivant:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\epsilon(\sigma,i)$ | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| $\delta(\sigma,i)$ | 2 | 1 | 4 | 4 | 2 | 4 | 2 |
| $\mathrm{res}(\hat{\sigma},i)$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $\mathrm{les}(\hat{\sigma},i)$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

**Définition 4** Soit $\sigma \in S_n^{(k,r)}$. Pour tout $i \in [1..n]$, on définit

$$\mathrm{RES}(\sigma,i) = r \cdot \mathrm{res}(\hat{\sigma},i) + \epsilon(\sigma,i) + \epsilon_i \delta(\sigma,i)$$

où $\epsilon_i = 1$ si $i$ est un creux ou une double descente de $\hat{\sigma}$ et $\epsilon_i = 0$ si $i$ est un pic ou une double montée de $\hat{\sigma}$; et

$$\mathrm{RES}^*(\sigma,i) = \begin{cases} 2r \cdot \mathrm{RES}(\sigma,i) + r & \text{si } i \text{ est un pic impair de } \hat{\sigma}; \\ 2r \cdot \mathrm{RES}(\sigma,i) & \text{si } i \text{ est un pic pair de } \hat{\sigma}; \\ \mathrm{RES}(\sigma,i) & \text{si } i \text{ n'est pas un pic de } \hat{\sigma}. \end{cases}$$

On pose

$$\mathrm{RES}(\sigma) = \sum_{1\leq i\leq n} \mathrm{RES}(\sigma, i), \quad \mathrm{RES}^*(\sigma) = \sum_{1\leq i\leq n} \mathrm{RES}^*(\sigma, i).$$

On rappelle [8] qu'un *chemin de Motzkin* est un chemin $\pi = (p_0, \dots, p_n)$ dans le plan $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ qui va de l'origine $p_0 = (0,0)$ au point $p_n = (n,0)$ sur l'axe horizontal en n'utilisant que des pas élémentaires Est (i.e., des pas horizontaux ou paliers), Nord-Est et Sud-Est. Si l'on code un pas Nord-Est par $NE$, un pas Sud-Est par $SE$ et un pas horizontal Est par $P$, on obtient alors un *mot de Motzkin* $c = c_1 \dots c_n$ sur l'alphabet $\{NE, SE, P\}$ qui est le codage au sens précédent d'un chemin de Motzkin.

Soit $h_1 = 0$ et $h_i = |c_1 \dots c_{i-1}|_{NE} - |c_1 \dots c_{i-1}|_{SE}$ pour $2 \leq i \leq n$, où $|w|_a$ représente le nombre d'occurrences de la lettre $a$ dans le mot $w$. On appelle $h_i$ le *niveau* du $i$-ième pas $c_i$. Un chemin de Motzkin sans pas Est est appelé *chemin de Dyck* et le codage correspondant est appelé *mot de Dyck*.

Pour la commodité de la description de la bijection $\Theta_n$, on code dans la suite chaque pas Est d'un chemin de Motzkin par $EB$ (pour Est bleu) ou $ER$ (pour Est rouge).

**Définition 5** Une histoire d'Euler d'ordre $(k, r)$ sur $[1..n]$ est un couple $(c, p)$ où $c = c_1 c_2 \cdots c_n$ est un mot de Motzkin et $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ une suite d'entiers positifs telle que

$$0 \leq p_i \leq \begin{cases} rh_i + k & \text{si} \quad c_i = \text{NE} \quad \text{ou} \quad \text{EB;} \\ rh_i - 1 & \text{si} \quad c_i = \text{SE} \quad \text{ou} \quad \text{ER.} \end{cases} \tag{33}$$

On note $M_n^{(k,r)}$ l'ensemble des histoires d'Euler d'ordre $(k, r)$ sur $[1..n]$.

**Théorème 2** *Soit $\sigma$ une $(k, r)$- MP sur $[1..n]$ et $\hat{\sigma}$ sa $k$-permutation associée. Pour $i = 1, \dots, n$, on pose $p_i = \mathrm{RES}(\sigma, i)$ et*

$$c_i = \begin{cases} NE & si \quad i \quad \text{est un creux de} \quad \hat{\sigma}; \\ SE & si \quad i \quad \text{est un pic de} \quad \hat{\sigma}; \\ EB & si \quad i \quad \text{est une double descente de} \quad \hat{\sigma}; \\ ER & si \quad i \quad \text{est une double montée de} \quad \hat{\sigma}. \end{cases} \tag{34}$$

*Alors $(c, p) = (c_1 \dots c_n, p_1 \dots p_n)$ est une histoire d'Euler d'ordre $(k, r)$ sur $[1..n]$. De plus, l'application $\Theta_n : \mathrm{S}_n^{(k,r)} \longrightarrow M_n^{(k,r)}$ définie par $\Theta_n(\sigma) = (c, p)$ est une bijection.*

**Démonstration:** Montrons d'abord que l'application $\Theta_n$ est bien définie.

1) Si $i$ est un pic ou une double montée de $\hat{\sigma}$, alors le niveau $h_i$ du $c_i$ satisfait l'équation:

$$h_i = \mathrm{res}(\hat{\sigma}, i) + \mathrm{les}(\hat{\sigma}, i) + 1. \tag{35}$$

Comme $\mathrm{res}(\hat{\sigma}, i) \leq h_i - 1$ et $\epsilon(\sigma, i) < r$, on a donc $p_i = \mathrm{RES}(\sigma, i) \leq rh_i - 1$.

2) Si $i$ est un creux ou une double descente de $\hat{\sigma}$, alors le niveau $h_i$ du $c_i$ satisfait l'équation:

$$h_i = \mathrm{res}(\hat{\sigma}, i) + \mathrm{les}(\hat{\sigma}, i). \tag{36}$$

Si $\epsilon(\sigma, i) = 0$, on a $p_i = \mathrm{RES}(\sigma, i) \leq rh_i + k$. Supposons que $\epsilon(\sigma, i) \neq 0$. Soit $w = x_m x_{m+1} \cdots x_{m+rq-1}$ le sous-mot maximal de $\sigma$ contenant $i$ et ne contenant aucune lettre nulle. Il existe un entier $p \in [1..q-1]$ tel que $i = x_{m+rp}$. Le lemme 2 implique que $p > 0$ et qu'il existe un entier $u < p$ tel que $x_{m+ru} < x_{m+rp}$. D'autre part, comme $i$ est un creux ou une double descente de $\hat{\sigma}$, alors $x_{m+r(p-1)} > x_{m+rp}$. Soit donc $s$ le plus grand des entiers $u < p$ tel que $x_{m+ru} < x_{m+rp}$. Alors $s < p - 1$ (ce qui implique que $p > 1$) et, par suite, le bloc de $\hat{\sigma}$ contenant $x_{m+rs}$ embrasse $i$

Alors $s < p - 1$ (ce qui implique que $p > 1$) et, par suite, le bloc de $\hat{\sigma}$ contenant $x_{m+rs}$ embrasse $i$ et se trouve à sa gauche. Il en résulte que $\mathrm{les}(\hat{\sigma}, i) \neq 0$ et $\mathrm{res}(\hat{\sigma}, i) \leq \mathrm{res}(\hat{\sigma}, i) + \mathrm{les}(\hat{\sigma}, i) - 1 = h_i - 1$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{RES}(\sigma, i) \leq r(h_i - 1) + \epsilon(\sigma, i) + k \leq rh_i + k - 1. \tag{37}$$

Montrons ensuite que l'application $\Theta_n$ est bijective. Pour ce faire, partant d'une histoire $(c, p)$ vérifiant la relation (33), nous allons trouver de façon algorithmique une unique $\sigma$ dans $S_n^{(k,r)}$ telle que $\Theta_n(\sigma) = (c, p)$.

Nous allons d'abord construire la $k$-permutation $\hat{\sigma}$ par $n$ étapes : partant du mot $\hat{\sigma}_0 = 0^k$ et insérant $i$ à la $i$-ième étape pour $i = 1, \ldots, n$.

À l'étape 1, comme $\epsilon(\sigma, 1) = \mathrm{res}(\hat{\sigma}, 1) = 0$, on a donc $\delta(\sigma, 1) = p_1$ et

$$\hat{\sigma}_1 = 0^{k-p_1}\, 1\, 0^{p_1}.$$

De plus, si $c_1 = NE$, on insère une lettre $*$ juste après 1.

Supposons que l'on est à la $i$-ième étape avec $i \geq 2$. Soit $y_1 y_2 \ldots y_{i-1}$ le réarrangement de $1, 2, \ldots, i-1$ selon leur disposition. Si $s := h_i > 0$, soit $y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_s}$ les lettres suivies d'une $*$ dans $\hat{\sigma}_{i-1}$. Posons, pour simplifier, $z_l = y_{j_l}$ $(1 \leq l \leq s)$.

Notons tout d'abord que :

- chaque fois qu'on insère un creux, on insère une $*$ après lui;

- on n'insère avant une $*$ qu'une lettre qui soit une double montée de $\hat{\sigma}$ mais on ne peut pas insérer une lettre juste après une lettre non nulle non suivie d'une $*$;
- insérer un pic, c'est remplacer une $*$ par ce pic.

1. Si $c_i = ER$ ou $SE$, alors $s > 0$ et les relations

$$p_i = r \cdot \mathrm{res}(\hat{\sigma}, i) + \epsilon(\sigma, i) \quad \text{et} \quad \epsilon(\sigma, i) < r$$

   impliquent que $\mathrm{res}(\hat{\sigma}, i)$ et $\epsilon(\sigma, i)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division de $p_i$ par $r$. Par conséquent,

   - si $c_i = ER$, on insère la lettre $i$ juste après $z_{s-\mathrm{res}(\hat{\sigma},i)}$;
   - si $c_i = SE$, on remplace par la lettre $i$ l'$*$ qui suit $z_{s-\mathrm{res}(\hat{\sigma},i)}$.

2. Si $c_i = NE$, on distingue deux cas suivant que $s = 0$ ou $s > 0$.
   $\underline{s = 0}$. On a nécessairement $\mathrm{res}(\hat{\sigma}, i) = 0$. De plus, $\epsilon(\sigma, i) = 0$ d'après le lemme 2. $\delta(\sigma, i) = p_i$:

   - Si $p_i = k$, on place le mot $i*$ en première position;
   - Si $p_i < k$, on insère le mot $i*$ juste après la $(k - p_i)$-ième lettre 0.

   $\underline{s > 0}$. On distingue 4 cas :

   - 1-er cas : $p_i < \delta(\sigma, z_s)$. La lettre $i$ ne doit pas être placée avant $z_s$, ni juste après l'$*$ qui suit $z_s$. Donc $\mathrm{res}(\hat{\sigma}, i) = 0$, $\epsilon(\sigma, i) = 0$ et, par suite, $\delta(\sigma, i) = p_i$. On insère ainsi la lettre $i$ après la $(k - p_i)$-ième lettre 0, puis une $*$ après $i$.
   - 2-ième cas : $\delta(\sigma, z_s) \leq p_i < \delta(\sigma, z_s) + r$.
     Dans ce cas, on doit insérer $i$ après l'$*$ qui suit $z_s$, suivi d'une $*$. Nécessairement, $\mathrm{res}(\hat{\sigma}, i) = 0$, $\delta(\sigma, i) = \delta(\sigma, z_s)$ et $\epsilon(\sigma, i) = p_i - \delta(\sigma, z_s)$.
   - 3-ième cas : $\delta(\sigma, z_l) + r(s - l + 1) \leq p_i < \delta(\sigma, z_{l-1}) + r(s - l + 2)$ $(1 \leq l \leq s)$. Dans ce cas, la lettre $i$ doit être placée entre $z_{l-1}$ et $z_l$. Donc, $\mathrm{res}(\hat{\sigma}, i) = s - l + 1$. Posons $d_i = p_i - r(s - l + 1)$.
     – Si $d_i < \delta(\sigma, z_{l-1})$, alors $\delta(\sigma, i) = p_i$ et $\epsilon(\sigma, i) = 0$. On insère $i$ après la $(k - d_i)$-ième lettre 0, puis une $*$ après $i$.
     – Si $d_i \geq \delta(\sigma, z_{l-1})$, alors $\delta(\sigma, i) = \delta(\sigma, z_{l-1})$ et $\epsilon(\sigma, i) = d_i - \delta(\sigma, z_{l-1})$. On insère $i$ après l'$*$ qui suit $z_{l-1}$, puis une $*$ après $i$.

- 4-ième cas : $p_i \geq \delta(\sigma, z_1) + rs$. La lettre $i$ doit être placée avant $z_1$. On a $\mathrm{res}(\hat{\sigma}, i) = s$, $\epsilon(\sigma, i) = 0$ et, par suite, $\delta(\sigma, i) = p_i - rs$. On insère donc $i$ juste après la $(k - p_i + rs)$-ième lettre 0, puis une $*$ après $i$ ($i$ est placé en première position si $k - p_i + rs = 0$).

3. Si $c_i = EB$, même chose que le cas où $c_i = NE$, mais on n'insère pas une $*$ après $i$.

À la fin de la $n$-ième étape, il n'y a plus d'$*$ car le nombre de $NE$ est égal au nombre de $SE$ dans $c$.

Cet algorithme nous permet donc de déterminer de façon unique une $k$-permutation $\hat{\sigma}$ et une suite $r$-compatible $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. D'après le lemme 3, $\sigma$ est entièrement déterminée. $\square$

**Exemple:** Considérons l'histoire $(c, p)$ de $M_9^{(5,3)}$ où
$c = (EB, NE, NE, SE, ER, NE, EB, SE, SE)$ et $p = (3, 0, 8, 2, 2, 4, 9, 5, 0)$.
Soit $\sigma$ son antécédent et $\hat{\sigma}$ la $k$-permutation associée à $\sigma$.
1) Construction de $\hat{\sigma}$.

| étape $i$ | nature de $i$ | $\mathrm{RES}(\sigma, i)$ | $\delta(\sigma, i)$ | $\epsilon(\sigma, i)$ | $\hat{\sigma}_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | double descente | 0 | 3 | 0 | $0^2 10^3$ |
| 2 | creux | 0 | 0 | 0 | $0^2 10^3 2*$ |
| 3 | creux | 1 | 5 | 0 | $3 * 0^2 10^3 2*$ |
| 4 | pic | 0 | – | 2 | $3 * 0^2 10^3 24$ |
| 5 | double montée | 0 | – | 2 | $35 * 0^2 10^3 24$ |
| 6 | creux | 0 | 4 | 0 | $35 * 06 * 010^3 24$ |
| 7 | double descente | 1 | 5 | 1 | $35 * 706 * 010^3 24$ |
| 8 | pic | 1 | – | 2 | $358706 * 010^3 24$ |
| 9 | pic | 0 | – | 0 | $3587069010^3 24$ |

On a $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_9 = 3\,5\,8\,7\,0\,6\,9\,0\,1\,0^3\,2\,4$.

2) Construction de $\sigma$.

Notons $\sigma_j$ la restriction de $\sigma$ à $S_j^{(5,3)}$ $(1 \leq j \leq 9)$. Cette restriction a pour $k$-permutation associée $\hat{\sigma}_j$ sans '$*$'. Comme $\sigma_j$ se déduit de $\sigma_{j-1}$ $(2 \leq j \leq 9)$ en insérant $j^3$ après la $(3s + t - \epsilon(\sigma, j))$-ième lettre de $\sigma_{j-1}$, où $s$ (*resp.* $t$) est le nombre de lettres non nulles (*resp.* lettres nulles) à gauche de $j$ dans $\hat{\sigma}_j$, on a successivement:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0^2 1^3 0^3; \\ \sigma_2 &= 0^2\, 1^3\, 0^3\, 2^3; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_3 &= 3^3\,0^2\,1^3\,0^3\,2^3;\\
\sigma_4 &= 3^3\,0^2\,1^3\,0^3\,2\,4^3\,2^2;\\
\sigma_5 &= 3\,5^3\,3^2\,0^2\,1^3\,0^3\,2\,4^3\,2^2;\\
\sigma_6 &= 3\,5^3\,3^2\,0\,6^3\,0\,1^3\,0^3\,2\,4^3\,2^2;\\
\sigma_7 &= 3\,5^3\,3\,7^3\,3\,0\,6^3\,0\,1^3\,0^3\,2\,4^3\,2^2;\\
\sigma_8 &= 3\,5^3\,8^3\,3\,7^3\,3\,0\,6^3\,0\,1^3\,0^3\,2\,4^3\,2^2;\\
\sigma_9 &= 3\,5^3\,8^3\,3\,7^3\,3\,0\,6^3\,9^3\,0\,1^3\,0^3\,2\,4^3\,2^2.
\end{aligned}
$$

C'est-à-dire $\sigma = \sigma_9 = 3\,5^3\,8^3\,3\,7^3\,3\,0\,6^3\,9^3\,0\,1^3\,0^3\,2\,4^3\,2^2$.

# 4 Interprétations combinatoires

Soit $\mathcal{D}_{2n}$ l'ensemble des mots de Dyck de longueur $2n$. Soient $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ deux suites d'éléments d'un anneau commutatif $\mathbf{K}$. A chaque mot $c = c_1 \ldots c_{2n}$ de Dyck de longueur $2n$ on associe le poids :

$$
v(w) = \prod_{i=1}^{2n} v(c_i) \quad \text{avec} \quad v(c_i) = \begin{cases} a_k & \text{si} \quad c_i = NE \quad \text{et} \quad h_i = k; \\ b_k & \text{si} \quad c_i = SE \quad \text{et} \quad h_i = k. \end{cases}
$$

Alors la fonction génératrice de $\mathcal{D}_{2n}$ a le développement en fraction continue suivant (voir [8]) :

$$
1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{w\in\mathcal{D}_{2n}} v(w)t^n \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_0 b_1\, t}{1 - \cfrac{a_1 b_2\, t}{1 - \cfrac{a_2 b_3\, t}{1 - \cfrac{a_3 b_4\, t}{\ddots}}}}}. \tag{38}
$$

**Définition 6** Soit $\sigma$ une $(k,r)$-MP sur $[1..n]$ et $\hat{\sigma}$ sa $k$-permutation associée. On dit que $\hat{\sigma}$ est alternante si elle n'a ni double montée ni double descente. Dans ce cas, on dit que $\sigma$ est une $(k,r)$-MP alternante. On notera $\Gamma_n^{(k,r)}$ l'ensemble des $(k,r)$-MP alternantes sur $[1..2n]$.

**Théorème 3** *On a l'interprétation combinatoire suivante:*

$$
E_n^{(k,r)}(x,q) = \sum_{\sigma\in\Gamma_n^{(k-1,r)}} x^{\mathrm{sig}(\sigma)} q^{\mathrm{RES}(\sigma)}, \tag{39}
$$

*où* $\mathrm{sig}(\sigma)$ *et* $\mathrm{RES}(\sigma)$ *sont définis respectivement dans la définition 2 et dans la définition 4.*

**Démonstration:** D'après (38), l'équation (16) équivaut à

$$E_n^{(k,r)}(x,q) = \sum_{c\in\mathcal{D}_{2n}} \prod_{c_i=SE} [rh_i] \prod_{c_i=NE} ([rh_i+k-1] + xq^{rh_i+k-1}).$$

D'autre part, pour tout $\sigma \in \Gamma_n^{(k-1,r)}$, on a $\mathrm{sig}(\sigma) = \mathrm{sig}(\hat{\sigma})$. Soit $(c,p) = \Theta_{2n}(\sigma)$. Comme $\mathrm{sig}(\hat{\sigma})$ est égal au nombre de creux $x$ de $\hat{\sigma}$ telles que $\mathrm{les}(\hat{\sigma},x) = 0$ et $\delta(\hat{\sigma},x) = k-1$, la bijection $\Theta_{2n}$ implique que $\mathrm{sig}(\sigma)$ est égal au nombre de $c_i = NE$ telles que $p_i = rh_{i-1}+k-1$. D'où (39). $\square$

En particulier, pour $r = q = 1$, on retrouve un résultat connu sur les nombres d'Euler d'ordre $k$ (voir [6, 8]).

**Corollaire 1** *Le nombre de $(k-1,1)$-MP alternantes de $[1..2n]$ est $E_{2n}^{(k)}$.*

Comme RES se réduit à res sur $\Gamma_n^{(0,1)}$, on déduit de (17) le résultat suivant.

**Corollaire 2** *Les $q$-polynômes sécants et les $q$-polynômes tangents ont pour interprétations respectives:*

$$S_n(x,q) = \sum_{\sigma\in\Gamma_n^{(0,1)}} x^{\mathrm{sig}(\sigma)} q^{\mathrm{res}(\sigma)}; \qquad (40)$$

$$T_n(x,q) = \sum_{\sigma\in\Gamma_n^{(1,1)}} x^{\mathrm{sig}(\sigma)} q^{\mathrm{RES}(\sigma)}. \qquad (41)$$

En particulier, on obtient un $q$-analogue d'un résultat d'André [1] :

$$E_{2n}(q) = \sum_{\sigma\in\Gamma_n^{(0,1)}} q^{\mathrm{res}(\sigma)}, \quad E_{2n+1}(q) = \sum_{\sigma\in\Gamma_n^{(1,1)}} q^{\mathrm{RES}(\sigma)}. \qquad (42)$$

Il est à noter que pour $q = 1$ on retrouve la même interprétation d'André pour $E_{2n}$ et mais une nouvelle interprétation pour $E_{2n+1}$. Par exemple, on a $\Gamma_1^{(0,1)} = \{12, 21\}$, $\Gamma_1^{(1,1)} = \{012, 120\}$, $\Gamma_2^{(0,1)} = \{1324, 1423, 2314, 2413, 3412\}$ et $\Gamma_2^{(1,1)} = \{01324, 01423, 13024, 14023, 02413, 02314, 24013, 23014, 03412, 34012, 13240, 14230, 24130, 23140, 34120, 12034\}$.

**Définition 7** On note $\gamma_n^{(k,r)}$ l'ensemble des $(k,r)$-MP alternantes $\sigma$ de $[1..2n]$ telles que $\mathrm{RES}(\sigma,i) \leq \lceil(\mathrm{res}(\hat{\sigma},i) + \mathrm{les}(\hat{\sigma},i)+1)/2\rceil - 1$ pour tout pic $i$ de $\hat{\sigma}$.

**Théorème 4** *On a*
$$L_n^{(k,r)}(x,q) = \sum_{\sigma\in\gamma_n^{(k,r)}} x^{\mathrm{sig}(\sigma)} q^{\mathrm{RES}^*(\sigma)}.$$
*En particulier,*
$$l_n(q) \;=\; \sum_{\sigma\in\gamma_n^{(0,1)}} q^{\mathrm{RES}^*(\sigma)}, \quad r_n(q) = \sum_{\sigma\in\gamma_n^{(1,1)}} q^{\mathrm{RES}^*(\sigma)}, \tag{43}$$
$$L_n(q) \;=\; \sum_{\sigma\in\gamma_n^{(0,2)}} q^{\mathrm{RES}^*(\sigma)}, \quad R_n(q) = \sum_{\sigma\in\gamma_n^{(2,2)}} q^{\mathrm{RES}^*(\sigma)}. \tag{44}$$

**Démonstration:** La démonstration est analogue à celle du théorème 3. La bijection $\Theta_{2n}$ implique que
$$\sum_{\sigma\in\gamma_n^{(k,r)}} x^{\mathrm{sig}(\sigma)} q^{\mathrm{RES}^*(\sigma)} \;=\; \sum_{c\in\mathcal{D}_{2n}} \prod_{\substack{c_i=SE\\ i \text{ pair}}} [(h_i+1)/2]_{q^{2r}} \prod_{\substack{c_i=SE\\ i \text{ impair}}} q^r[h_i/2]_{q^{2r}} \prod_{c_i=NE} ([rh_i+k]+xq^{rh_i+k}).$$
Comme $[2nr]=[2r][n]_{q^{2r}}$, l'équation (25) montre que cette dernière somme est aussi égale à $L_n^{(k,r)}(x,q)$. $\square$

En prenant $q=1$, on obtient les interprétations suivantes pour les nombres correspondants.

- $L_n$ représente le nombre de 2-MP alternantes $\sigma$ de $[1..2n]$ telles que $2\,\mathrm{RES}(\sigma,i) \le \mathrm{res}(\hat\sigma,i)+\mathrm{les}(\hat\sigma,i)$ pour tout pic $i$ de $\hat\sigma$;
- $R_n$ représente le nombre de (2,2)-MP alternantes $\sigma$ de $[1..2n]$ telles que $2\,\mathrm{RES}(\sigma,i) \le \mathrm{res}(\hat\sigma,i)+\mathrm{les}(\hat\sigma,i)$ pour tout pic $i$ de $\hat\sigma$;
- $l_n$ représente le nombre de permutations alternantes $\sigma$ de $[1..2n]$ telles que $\mathrm{res}(\sigma,i)\le \mathrm{les}(\sigma,i)$ pour tout pic $i$ de $\sigma$;
- $r_n$ représente le nombre de (1,1)-MP alternantes $\sigma$ de $[1..2n]$ telles que $\mathrm{res}(\sigma,i)\le \mathrm{les}(\sigma,i)$ pour tout pic $i$ de $\sigma$.

Par exemple, pour $n=2$ on a $l_2=\#\{1423,\ 2413,\ 3412\}=3$, $r_2=\#\{12034,$ 01423, 14023, 14230, 02413, 24013, 24130, 03412, 34012, $34120\}=10$, $L_2=\#\{11442233,$ 12442133, 22441133, $33441122\}=4$ et $R_2=\#\{0112203344,$ 1122003344, 1122033440, 0033441122, 0334401122, 0334411220, 3344001122, 3344011220, 3344112200, 0011442233, 0012442133, 0114402233, 0114422330, 0124421330, 1144002233, 1144022330, 1144223300, 1244213300, 0022441133, 0224401133, 0224411330, 2244001133, 2244011330, $2244113300\}=24$.

## 5 Liens avec les nombres de Genocchi

On rappelle que les nombres de Genocchi sont définis par

$$\sum_{n\geq 1} G_{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!} = t\tan(t/2).$$

Posons

$$G_n^{(r)}(x,q) = P_n^{(0,r,r,0)}(x,q). \tag{45}$$

Il vient du Théorème 1 que

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} G_n^{(r)}(x,q)t^n &= 1+[r]x\,t+[r]^2x(x+[x,r])\;t^2+\dots \\ &= \cfrac{1}{1-\cfrac{[r]x\,t}{1-\cfrac{[r][x,r]_q\,t}{1-\cfrac{[2r][x,r]_q\,t}{1-\cfrac{[2r][x,2r]_q\,t}{1-\cfrac{[3r][x,2r]_q\,t}{1-\cfrac{[3r][x,3r]_q\,t}{\ddots}}}}}}}.\end{aligned} \tag{46}$$

On en déduit alors de la formule de S-fraction continue pour les nombres de Genocchi [19] que

$$G_n^{(1)}(1,1) = G_{2n+2}.$$

D'autre part, par (3) on voit que

$$G_n^{(2)}(1,1) = E_{2n+1}.$$

Rappelons que, si $k=0$, une $(k,r)$-MP se réduit à une $r$-MP. Soit $\Gamma_n^r$ l'ensemble des $r$-MP alternantes $\sigma$ de $[1..2n]$ telles que

- $\mathrm{res}(\sigma,i)\leq \mathrm{les}(\sigma,i)$ pour tout pic $i$ de $\sigma$;
- $\mathrm{res}(\sigma,i)\leq \mathrm{les}(\sigma,i)+(-1)^{\chi(\epsilon(\sigma,i)\neq 0)}$ pour tout creux $i$ de $\sigma$.

**Définition 8** Une histoire de Genocchi d'ordre r sur $[1..2n]$ est un couple $(c,p)$ où $c$ est un mot de Dyck de longueur $2n$ et $p=p_1p_2\cdots p_{2n}$ une suite de $2n$ entiers telle que $0\leq p_i\leq r\lceil h_{i-1}/2\rceil$ si $c_i$ est un $NE$ de $c$ et $0\leq p_i\leq r\lceil h_{i-1}/2\rceil-1$ si $c_i$ est un $SE$ de $c$. On note $H_n^{(r)}$ l'ensemble des histoires de Genocchi d'ordre r sur $[1..2n]$.

**Remarque:** Pour $r = 1$, on retrouve la même notion de [16].

**Théorème 5** *On a l'interprétation combinatoire suivante :*

$$G_n^{(r)}(x, q) = \sum_{\sigma \in \Gamma_n^r} x^{\mathrm{EQUI}(\hat{\sigma})} q^{\mathrm{RES}(\sigma)}. \tag{47}$$

*où* $\mathrm{EQUI}(\hat{\sigma})$ *est le nombre de creux* $i$ *de* $\hat{\sigma}$ *tels que* $\mathrm{res}(\hat{\sigma}, i) = \mathrm{les}(\hat{\sigma}, i)$ *ou* $\mathrm{res}(\hat{\sigma}, i) = \mathrm{les}(\hat{\sigma}, i) + 1$.

**Démonstration:** La restriction de $\Theta_{2n}$ sur $\Gamma_n^r$ envoie bijectivement $\Gamma_n^r$ sur l'ensemble $H_n^{(r)}$. On note que $\mathrm{EQUI}(\hat{\sigma})$ correspond au nombre de $NE$ dans $c$ telles que $p_i = r\lceil h_i/2 \rceil$. On a donc l'identité suivante:

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma \in \Gamma_n^r} x^{\mathrm{EQUI}(\hat{\sigma})} q^{\mathrm{RES}(\sigma)} &= \sum_{c \in \mathcal{D}_{2n}} \prod_{c_i = NE} ([r\lceil h_{i-1}/2 \rceil] + x q^{r\lceil h_{i-1}/2 \rceil}) \\ &\quad \times \prod_{c_i = SE} [r\lceil h_{i-1}/2 \rceil],\end{aligned}$$

ce qui est exactement la formule obtenue pour $G_n^{(r)}(x, q)$ en appliquant (38) à (46). □

Il en résulte que $G_{2n+2}$ est égal au nombre de permutations alternantes $\sigma$ de $[1..2n]$ telles que

- $\mathrm{res}(\sigma, i) \leq \mathrm{les}(\sigma, i)$ pour tout pic $i$ de $\sigma$;
- $\mathrm{res}(\sigma, i) \leq \mathrm{les}(\sigma, i) + 1$ pour tout creux $i$ de $\sigma$.

Par exemple, on a $G_6 = \#\{1423, 2413, 3412\} = 3$.

**Remerciements** Nous remercions les deux arbitres anonymes pour leurs lectures attentives, qui ont permis d'améliorer la présentation de cet article.

# Références

[1] André (D.). *Sur les permutations alternées*, J. de Math. Pures et Appliquées, **7** (1881), Séries 3, 167-184.

[2] Andrews (G.) et Foata (D.). *Congruences for the q-secant numbers*, European J. Combin., **1** (1980), no. 4, 283-287.

[3] Andrews (G.) et Gessel (I.). *Divisibility properties of the q-tangent numbers*, Proc. Amer. Math. Soc., **68** (1978), no. 3, 380-384.

[4] ARNOLD (V. I.). *Bernoulli-Euler updown numbers associated with function singularities, their combinatorics and arithmetics*, Duke Math. J., **63** (1974), 537-555.

[5] CLARKE (R.), STEINGRIMSSON (E.) et ZENG (J.). *New Euler-Mahonian Statistics on Permutations and Words*, Adv. Appl. Math., **18** (1997), 237-270.

[6] CARLITZ (L.) et SCOVILLE (R.). *Tangent numbers and operators*, Duke. Math. J., **39** (1972), 413-429.

[7] DUMONT (D.). *Further triangles of Seidel-Arnold type and continues fractions related to Euler and Springer numbers*, Adv. Appl. Math., **16** (1995), 275-296.

[8] FLAJOLET (P.). *Combinatorial aspects of continued fractions*, Disc. Math., **32** (1980), 125-161.

[9] FLAJOLET (P.). *On congruences and continued fractions for some classical combinatorial quantities*, Disc. Math., **41** (1982), 145-153.

[10] FOATA (D.). *Further divisibility properties of the $q$-tangent numbers*, Proc. Amer. Math. Soc., **81** (1981), no. 1, 143-148.

[11] GESSEL (I.) et STANLEY (R.). *Stirling polynomials*, J. Combin. Theory, Ser. A **24** (1978), 24-33.

[12] GRAHAM (R.), KNUTH (D.) et PATASHNIK (O.). *Concrete mathematics*, second edition, Addison-Wesley, 1994.

[13] HAN (G.N.) et ZENG (J.). *$q$-Polynômes de Gandhi et statistique de Denert*, to appear in Disc. Math., 1999.

[14] HAN (G.N.) et ZENG (J.). *On a $q$-sequence that generalizes the median Genocchi numbers* , to appear in Ann. Sci. Math. Québec, 1999

[15] PARK (S.). *The $r$-multipermutations*, J. Combin. Theory, Ser. A **67** (1994), 44-71.

[16] RANDRIANARIVONY (A.). *Fractions continues, $q$-nombres de Catalan et $q$-polynômes de Genocchi*, European J. Combin., **18**(1997), 75-92.

[17] RANDRIANARIVONY (A.) et ZENG (J.). *Sur une extension des nombres d'Euler et les records des permutations alternantes*, J. Combin. Theory Ser. A, **68** (1994), 86-99.

[18] RANDRIANARIVONY (A.) et ZENG (J.). *Une famille de polynômes qui interpole plusieurs suites classiques de nombres*, Adv. Appl. Math., **17** (1996), 1-26.

[19] VIENNOT (G.). *Une théorie combinatoire des nombres d'Euler et Genocchi*, Séminaire de Théorie des nombres de l'Université Bordeaux, Exposé no. 11, 1980–1981, Publications de l'Université Bordeaux I.

[20] WALL (H.S.). *Continued fractions and totally monotone sequences*, Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 165-184.