Séminaire Lotharingien de Combinatoire **44** (2000), Article B44g

Généralisation de formules de type Waring

Frédéric Jouhet et Jiang Zeng
Institut Girard Desargues
Université Claude Bernard (Lyon 1)
69622 Villeurbanne Cedex, France
Email: jouhet@desargues.univ-lyon1.fr
zeng@desargues.univ-lyon1.fr

Abstract

We evaluate the symmetric functions e_k, h_k and p_k on the alphabet $\{x_r/(1-tx_r)\}$ by elementary methods and give the related generating functions. Our formulas lead to a new and short proof of an ex-conjecture of Lassalle [3], which was proved by Lascoux and Lassalle [1] in the framework of λ-rings theory.

1 Introduction

L'un des problèmes fondamentaux dans l'étude de fonctions symétriques est le développement d'une fonction symétrique sur certaines bases linéaires de l'algèbre des fonctions symétriques. Un résultat classique de Waring explicite le développement des fonctions symétriques puissances p_n dans la base linéaire des fonctions symétriques élémentaires (e_λ).

Dans cet article nous généralisons la formule de Waring en développant les fonctions symétriques puissances p_n évaluées sur l'alphabet $Y=\{x_1/(1-tx_1), x_2/(1-tx_2),\ldots\}$ dans la base linéaire des fonctions symétriques élémentaires (e_λ) évaluées sur l'alphabet $X=\{x_1,x_2,\ldots\}$. De même nous considérons le problème inverse, c'est-à-dire, le développement des fonctions symétriques h_n et e_n évaluées sur l'alphabet Y dans la base des fonctions puissances p_μ évaluées sur l'alphabet X. Dans le dernier cas nous aurons besoin d'un coefficient binomial généralisé introduit par Lassalle [2]. Nous en déduisons ensuite, comme applications, des développements intéressants, qui conduisent en particulier à des nouvelles preuves des ex-conjectures de Lassalle [2, 3]. D'autres preuves de ces conjectures ont été tout récemment données par Lascoux et Lassalle [1] dans le cadre des λ-anneaux. Notre approche repose essentiellement sur l'opérateur différentiel de l'algèbre des séries formelles. Il est remarquable que l'étude d'un problème si élémentaire puisse conduire à une preuve très simple de l'identité de Lascoux et Lassalle.

Nous terminons cette introduction par un rappel [4, Chap.1] des formules qui seront utilisées dans la suite. Observons d'abord que

$$\sum_{n\geq 1}\binom{n-1}{k-1}a_n t^{n-1}=\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dt}\left(\sum_{n\geq 1}a_n t^{n-1}\right). \tag{1}$$

Comme les fonctions puissances $p_n(X)=\sum_{r\geq 1}x_r^n$ satisfont $\sum_{n\geq 1}p_n(X)t^{n-1}=\sum_{r\geq 1}x_r/(1-x_r t)$, et pour tout $k\geq 1$

$$\frac{d^{k-1}}{dt}\left(\frac{1}{1-xt}\right)=(k-1)!\frac{x^{k-1}}{(1-xt)^k},$$

nous en déduisons donc

$$\frac{d^{k-1}}{dt}\left(\sum_{n\geq 1}p_n(X)t^{n-1}\right)=\frac{(k-1)!}{t^k}p_k\left(\frac{tx_1}{1-tx_1},\frac{tx_2}{1-tx_2},\ldots\right). \tag{2}$$

Pour toute partition d'entiers μ on pose $z_\mu=\prod_{i\geq 1}i^{m_i(\mu)}m_i(\mu)!$, où $m_i(\mu)$ est le nombre de parts dans μ égales à $i\geq 1$, et pour tout entier n positif on définit le coefficient binomial généralisé $\left\langle {\mu \atop n}\right\rangle$ comme étant le nombre de façons de choisir n éléments dans le diagramme de Ferrers de μ, dont au moins un par ligne.

Les fonctions symétriques $h_n(X)$ et $e_n(X)$ sont liées aux fonctions puissances $p_\mu(X)=\prod_{r\geq 1}p_{\mu_r}(X)$ par la formule :

$$h_n(X) = \sum_{\mu\vdash n}z_\mu^{-1}p_\mu(X), \tag{3}$$

$$e_n(X) = \sum_{\mu\vdash n}(-1)^{n-l(\mu)}z_\mu^{-1}p_\mu(X). \tag{4}$$

L'inverse de la dernière est appelée *formule de Waring* [5]:

$$p_n(X)=\sum_{\lambda\vdash n}(-1)^{n-l(\lambda)}\frac{n(l(\lambda)-1)!}{\prod_i m_i(\lambda)!}e_\lambda(X). \tag{5}$$

Par l'involution ω définie par $\omega(e_n) = h_n$ on a aussi [4, p. 24]

$$p_n(X) = \sum_{\lambda \vdash n} (-1)^{l(\lambda)-1} \frac{n(l(\lambda)-1)!}{\prod_i m_i(\lambda)!} h_\lambda(X). \tag{6}$$

On note $m_\mu(X)$ la fonction symétrique monomiale associée à la partition μ.

Nous remercions Michel Lassalle pour ses remarques amicales sur une version antérieure de cet article.

2 Résultats principaux

Soit $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un ensemble fini ou infini d'indéterminées et $\frac{X}{1-tX}$ l'alphabet $\{\frac{x_1}{1-tx_1}, \frac{x_2}{1-tx_2}, \ldots\}$.

Théorème 1 *Pour tout $k \geq 1$ on a*

$$p_k\left(\frac{X}{1-tX}\right) = \sum_{|\mu| \geq k} t^{|\mu|-k} \binom{|\mu|}{k} (-1)^{|\mu|-l(\mu)} \frac{k\,(l(\mu)-1)!}{\prod_i m_i(\mu)!} e_\mu(X), \tag{7}$$

$$p_k\left(\frac{X}{1-tX}\right) = \sum_{|\mu| \geq k} t^{|\mu|-k} \binom{|\mu|}{k} (-1)^{l(\mu)-1} \frac{k\,(l(\mu)-1)!}{\prod_i m_i(\mu)!} h_\mu(X). \tag{8}$$

Démonstration. Les formules (1) et (2) impliquent directement

$$p_k\left(\frac{X}{1-tX}\right) = \sum_{j \geq k} t^{j-k} \binom{j-1}{k-1} p_j(X).$$

On en déduit donc (7) et (8) respectivement de (5) et (6). $\square$

Par la même méthode nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 2 *Pour tout entier $k \geq 1$ on a*

$$h_k\left(\frac{X}{1-tX}\right) = \sum_{|\mu| \geq k} t^{|\mu|-k} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(X), \tag{9}$$

$$e_k\left(\frac{X}{1-tX}\right) = \sum_{|\mu| \geq k} t^{|\mu|-k} (-1)^{k-l(\mu)} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(X). \tag{10}$$

Démonstration. Notons d'abord que

$$\left\langle \begin{matrix} \mu \\ k \end{matrix} \right\rangle = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=k \\ k_1,\ldots,k_l\geq 1}} \prod_{i=1}^{l} \binom{\mu_i}{k_i},$$

où $l = l(\mu)$. Comme chaque partition μ de j correspond à $l(\mu)!/\prod_{i\geq 1} m_i(\mu)!$ compositions $(k_1,\ldots,k_l)$ de j telles que $(k_1,\ldots,k_l)$ soit une permutation des parts de μ, nous avons, en tenant compte de (1) et (2),

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\geq k} t^{j-k} \sum_{\mu\vdash j} \frac{\alpha^{k-l(\mu)}}{z_\mu} \left\langle \begin{matrix} \mu \\ k \end{matrix} \right\rangle p_\mu(X) \\
&\quad = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=k \\ l\geq 1}} \frac{\alpha^{k-l} t^{-k}}{l! k_1 \cdots k_l} \prod_{r=1}^{l} \sum_{\mu_r\geq 1} \binom{\mu_r - 1}{k_r - 1} p_{\mu_r}(X) t^{\mu_r} \\
&\quad = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=k \\ l\geq 1}} \frac{\alpha^{k-l}}{l! k_1! \cdots k_l!} \prod_{r=1}^{l} \frac{d^{k_r-1}}{dt} \left(\sum_{n\geq 1} p_n(X) t^{n-1} \right) \\
&\quad = \sum_{\mu\vdash k} \frac{\alpha^{k-l(\mu)}}{z_\mu} p_\mu \left(\frac{x_1}{1-tx_1}, \frac{x_2}{1-tx_2}, \ldots \right).
\end{aligned}$$

En posant $\alpha = 1$ (resp. -1), nous en déduisons (9) (resp. (10)) en appliquant (3) (resp. (4)). $\square$

Remarque. 1) Lorsque $t = 0$ on retrouve les formules classiques de type Waring.
2) Dans les théorèmes 1 et 2, t n'est qu'un paramètre d'homogénéité, mais vu le rôle important qu'il joue dans notre démonstration, nous préférons garder cette forme.

Rappelons que $h_n(X)$ et $e_n(X)$ ont pour fonctions génératrices:

$$\sum_{n\geq 0} h_n(X) t^n = \prod_{r\geq 1} \frac{1}{1 - x_r t}, \tag{11}$$

$$\sum_{n\geq 0} e_n(X) t^n = \prod_{i\geq 1} (1 + x_i t)\,. \tag{12}$$

Théorème 3 *Soit z et $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ des indéterminées indépendantes. Alors la série formelle*

$$F(t,u) = (1+u)^z \prod_{r\geq 1} \left(1 + \frac{u}{1+u} \frac{tx_r}{1-tx_r} \right)$$

admet les trois développements suivants

$$F(t,u) = \sum_{i,j\geq 0} u^i t^j \sum_{l(\mu)\leq i, |\mu|=j} \binom{z-l(\mu)}{i-l(\mu)} m_\mu(X), \tag{13}$$

$$F(t,u) = \sum_{i,j\geq 0} u^i t^j \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{z-j}{i-k} \sum_{\mu\vdash j} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(X), \tag{14}$$

$$F(t,u) = \sum_{i,j\geq 0} u^i t^j \sum_{k\geq 0} \binom{z-k}{i-k} \sum_{\mu\vdash j} (-1)^{k-l(\mu)} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(X). \tag{15}$$

Démonstration. Tout d'abord, par définition nous avons

$$\begin{aligned} F(t,u) &= \sum_{k\geq 0} u^k (1+u)^{z-k} \sum_{\substack{1\leq r_1<r_2<\cdots<r_k \\ m_1,\ldots,m_k\geq 1}} (tx_{r_1})^{m_1} \cdots (tx_{r_k})^{m_k} \\ &= \sum_{i,j\geq 0} u^i t^j \sum_{k\geq 0} \binom{z-k}{i-k} \sum_{l(\mu)=k, |\mu|=j} m_\mu(X). \end{aligned}$$

D'où (13). Ensuite, dans le membre de droite de (14) en remplaçant i par $i+k$, nous obtenons en appliquant la formule du binôme

$$\sum_{k\geq 0} u^k \sum_{j\geq 0} (1+u)^{z-j} t^j \sum_{\mu\vdash j} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(X),$$

qui s'écrit, en posant $s = t/(1+u)$ et en appliquant (9) et (11),

$$(1+u)^z \sum_{k\geq 0} u^k h_k \left(\frac{sx_1}{1-sx_1}, \frac{sx_2}{1-sx_2}, \ldots \right) = (1+u)^z \prod_{r\geq 1} \left(1 - \frac{usx_r}{1-sx_r}\right)^{-1}.$$

Ceci est clairement égal à $F(t,u)$. Enfin nous déduisons (15) de façon analogue en appliquant (10) et (12). □

Corollaire 4 *Soit z et $X = \{x_1, x_2 \ldots\}$ des indéterminées indépendantes. Pour tous entiers $i, j \geq 1$ on a*

$$\begin{aligned} \sum_{l(\mu)\leq i, |\mu|=j} \binom{z-l(\mu)}{i-l(\mu)} m_\mu(X) &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{z-j}{i-k} \sum_{\mu\vdash j} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(X) \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{z-k}{i-k} \sum_{\mu\vdash j} (-1)^{k-l(\mu)} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(X). \end{aligned}$$

Comme $(p_\mu)_\mu$ forme une base linéaire de l'algèbre des fonctions symétriques, on déduit du corollaire 4 le résultat suivant.

Corollaire 5 *Soit z une variable. Pour des entiers $i, j \geq 1$ et toute partition $\mu \vdash j$ on a*

$$\sum_{k=0}^{min(i,j)} \binom{z-j}{i-k} \left\langle \begin{matrix} \mu \\ k \end{matrix} \right\rangle = \sum_{k=0}^{min(i,j)} (-1)^{k-l(\mu)} \binom{z-k}{i-k} \left\langle \begin{matrix} \mu \\ k \end{matrix} \right\rangle .$$

Enfin le corollaire 4 implique aussi le résultat suivant, dû à Lascoux-Lassalle [1, Lemme 2].

Corollaire 6 *Pour tous entiers $k, j \geq 1$ on a*

$$\sum_{l(\mu)=k, |\mu|=j} m_\mu(X) = \sum_{\mu \vdash j} (-1)^{k-l(\mu)} \frac{\left\langle \begin{smallmatrix} \mu \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(X).$$

Remarque. On trouvera d'autres formules sur la somme $\sum_{l(\mu)=k,|\mu|=j} m_\mu(X)$ dans Macdonald [4, p. 33 et 68].

3 Applications

On identifie chaque partition λ avec son *diagramme de Ferrers* et on pose

$$(x)_\lambda = \prod_{(i,j)\in\lambda} (x + j - 1 - (i-1)/\alpha) .$$

Lorsque $\lambda = (n)$ est une partition-ligne on retrouve la définition habituelle de factorielle montante $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$. Par un calcul direct et en posant $Z = \{j - 1 - (i-1)/\alpha\}$ $((i,j) \in \lambda)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{(y-x)_\lambda}{(y)_\lambda} &= \prod_{z\in Z} \left(1 - \frac{x/y}{1+z/y}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{|\lambda|} (-x/y)^i \sum_{z_1,\ldots,z_i\in Z} \frac{1}{1+z_1/y} \cdots \frac{1}{1+z_i/y} \\ &= \sum_{i=0}^{|\lambda|} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \frac{x^i}{y^{i+j}} \sum_{l(\mu)\leq i, |\mu|=j} \binom{|\lambda| - l(\mu)}{i - l(\mu)} m_\mu(Z). \end{aligned}$$

Nous déduisons donc du corollaire 4 une courte preuve d'un résultat de Lascoux-Lassalle [1, Thm. 4], qui fut conjecturé par Lassalle [2, Conj. 2].

Théorème 7 *Soient x, y deux indéterminées indépendantes. Pour toute partition λ soit $X = \{j-1-(i-1)/\alpha\}$, $(i,j) \in \lambda$, alors*

$$\frac{(y-x)_\lambda}{(y)_\lambda} = \sum_{i=0}^{|\lambda|} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^{i+j} \frac{x^i}{y^{i+j}} \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{|\lambda|-j}{i-k} \sum_{\mu \vdash j} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(X).$$

En fait Lascoux et Lassalle [1] ont déduit le théorème 7 d'un résultat plus général, qui fut aussi conjecturé par Lassalle [3]. Nous en donnons aussi une nouvelle preuve.

Théorème 8 *Soient z,u et $X = \{x_1, x_2 \dots\}$ des indéterminées indépendantes. Pour tous entiers n, $r \geq 1$ on a*

$$\sum_{\mu \vdash n} \frac{(-1)^{r-l(\mu)}}{z_\mu} \left\langle {\mu \atop r} \right\rangle \prod_{i \geq 1} \left(z + \sum_{k \geq 1} u^k \frac{(i)_k}{k!} x_k \right)^{m_i(\mu)} =$$

$$\sum_{j \geq 0} u^j \binom{n+j-1}{n-r} \sum_{k=0}^{\min(r,j)} \binom{z-j}{r-k} \sum_{\mu \vdash j} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} \prod_{i \geq 1} x_i^{m_i(\mu)}.$$

Démonstration. Soit $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ une famille infinie d'indéterminées. Comme les fonctions puissances $p_i(Y)$ sont algébriquement indépendantes dans ce cas, nous pouvons supposer $x_i = p_i(Y)$ pour $i \geq 1$. En multipliant le membre de gauche par $t^n q^r$ et sommant sur n, $r \geq 1$ nous pouvons écrire sa fonction génératrice comme suit (voir l'Appendice ci-après):

$$F(tu, Tq) = (1+Tq)^z \prod_{j \geq 1} \left(1 + \frac{Tq}{1+Tq} \frac{Tuz_j}{1-Tuz_j} \right), \tag{16}$$

où $T = t/(1-t)$ et $z_j = y_j/t$ pour $j \geq 1$. Nous en déduisons par l'application du théorème 3 que

$$\begin{aligned} F(tu, Tq) &= \sum_{r,j,k \geq 0} T^{r+j} q^r u^j \binom{z-j}{r-k} \sum_{\mu \vdash j} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(Z) \\ &= \sum_{r,j,k \geq 0} \frac{t^r q^r u^j}{(1-t)^{r+j}} \binom{z-j}{r-k} \sum_{\mu \vdash j} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(Y). \end{aligned}$$

En écrivant

$$\frac{t^r}{(1-t)^{r+j}} = \sum_{n \geq r} \binom{n+j-1}{n-r} t^n,$$

nous remarquons que l'expression plus haut est aussi la fonction génératrice du membre de droite. $\square$

Appendice. Calcul de la fonction génératrice

Afin de rendre la lecture autonome nous incluons ici une preuve classique de (16). Remarquons d'abord que pour toute partition μ

$$\sum_{r\geq 1} \left\langle {\mu \atop r} \right\rangle q^r = \prod_{i\geq 1} \Big((1+q)^i - 1\Big)^{m_i(\mu)},$$

et que la formule du binôme $(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n\geq 0} x^n (\alpha)_n/n!$ permet d'écrire

$$\sum_{n\geq 1} u^n \frac{(i)_n}{n!} p_n(Y) = \sum_{j\geq 1}\sum_{n\geq 1} u^n \frac{(i)_n}{n!} y_j^n = \sum_{j\geq 1}((1-y_j u)^{-i} - 1).$$

En multipliant le membre de gauche par $t^n q^r$ et sommant sur n, $r \geq 1$ nous obtenons sa fonction génératrice

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu} \frac{t^{|\mu|}}{z_\mu} \prod_{i\geq 1} \left[(1-(1-q)^i)\left(z + \sum_{j\geq 1} u^j \frac{(i)_j}{j!} p_j(Y)\right)\right]^{m_i(\mu)} \\
=\ & \prod_{i\geq 1}\sum_{m_i\geq 0} \frac{t^{i\,m_i}}{m_i!\, i^{m_i}} \left[(1-(1-q)^i)(z + \sum_{j\geq 1}((1-y_j u)^{-i} - 1))\right]^{m_i}.
\end{aligned}$$

Mais le dernier terme peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\prod_{i\geq 1} \exp\left\{\left(\frac{t^i}{i} - \frac{t^i}{i}(1-q)^i\right)\left(z + \sum_{j\geq 1}((1-y_j u)^{-i} - 1)\right)\right\} \\
=\ & \left(1 + \frac{tq}{1-t}\right)^z \prod_{j\geq 1} \exp \sum_{i\geq 1} \left(\frac{t^i}{i} - \frac{t^i}{i}(1-q)^i\right)\left(\frac{1}{(1-y_j u)^i} - 1\right) \\
=\ & \left(1 + \frac{tq}{1-t}\right)^z \prod_{j\geq 1} \left(1 + \frac{tq}{1-t-y_j u}\right)\left(1 + \frac{tq}{1-t}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

On pourrait trouver des calculs similaires aux précédents dans [2] ou dans [1] en termes de λ-anneaux.

Références

[1] Lascoux (A.) et Lassalle (M.) *Une identité remarquable en théorie des partitions*, Math. Annalen 318 (2000), 299–313.

[2] Lassalle (M.) *Quelques conjectures combinatoires relatives à la formule classique de Chu-Vandermonde*, Adv. in Appl. Math. 21 (1998), 457-472.

[3] Lassalle (M.) *Une identité en théorie des partitions*, J. Combin. Theory, Series A 89 (2000), 270–288.

[4] Macdonald (I.G.) *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, second edition, Oxford Science Publications, 1995.

[5] Macmahon (M.P.) *Combinatory analysis*, reprinted by Chelsea Publ. Company, 1960.