Feuille d'exercices n° 1

Révisions sur les séries numériques et les suites de fonctions

I. Séries numériques

Exercice 1. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

a). $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ b). $u_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}$ c). $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ d). $u_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont aussi convergentes :

$$\sum \max(u_n, v_n), \quad \sum \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Exercice 3. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$\text{a). } u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right), \qquad \text{b). } u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1}).$$

Exercice 4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$.

1. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
2. Donner un encadrement du reste d'ordre n de cette série.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$ est un réel négatif.

Exercice 5. Étudier la nature de la série suivante et calculer sa somme si elle est convergente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 6. Déterminer un équivalent simple de :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha < 1$ donné,
2. $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha > 1$ donné.

Exercice 7. Déterminer en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature des séries de termes généraux :

a). $u_n = e^{-n^\alpha}$, b). $u_n = \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$, c). $u_n = \exp(-(\ln n)^\alpha)$ d). $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$.

Exercice 8. Prouver l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n}$.

Indication : on pourra essayer de faire apparaître un produit de Cauchy.

II. Suites de fonctions

Exercice 9. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $f_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démontrer que pour tout $a > 0$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les intervalles $]-\infty;-a]$ et $[a;+\infty[$.
3. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0;+\infty[$?

Exercice 10. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$ pour $x \in [0;1]$.

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 11. Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies sur $[0;1]$ par $f_n(x) = \dfrac{f(x)}{1+n^2x^2}$.

1. Lorsque $f(x) = x$ pour tout $x \in [0;1]$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?
2. On revient à f quelconque. Montrer que si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$, alors $f(0) = 0$.

Exercice 12. Calculer la limite de $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x\,\mathrm{d}x$ quand $n \to +\infty$.

On pourra utiliser l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ *valable pour tout* $u > -1$.