Analyse IV, TD 2
EVN

1. Normes

$\boxed{\text{Ex 1}}$: 1. $\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$, $\|u\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\|u\|_\infty = \sup |u_i|$

2. dimension finie

3. $\|u\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,\|u\|_2 \leqslant n\,\|u\|_\infty \leqslant n\,\|u\|_1$

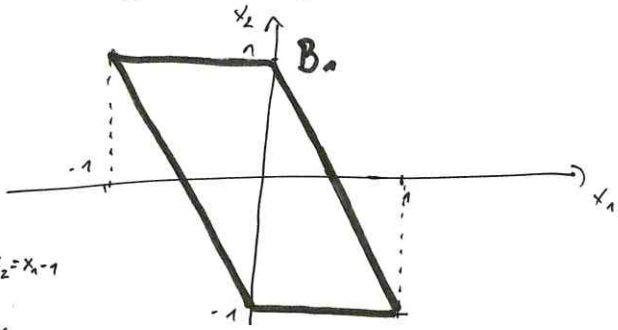
égalité pour $(1,1,\dots 1)$ (C.S) — pour $(1,\dots 1)$ — $(1,0,\dots 0)$

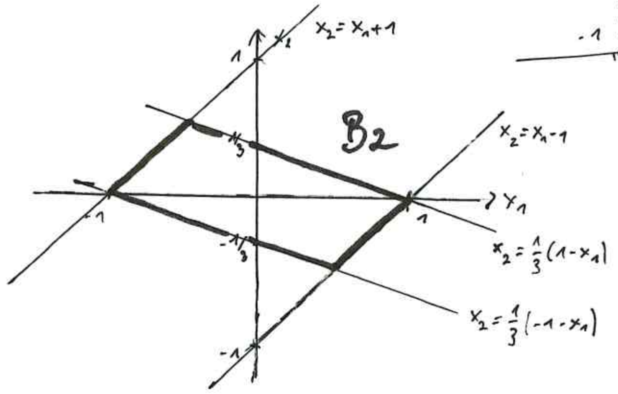
$\boxed{\text{Ex 2}}$: $N_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1,x_2) \longmapsto |x_1+x_2| + |x_1|$; $N_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1,x_2) \longmapsto \max(|x_1+3x_2|, |x_1-x_2|)$

1. Positivité, homogénéité, séparation, inégalité triangulaire : OK.

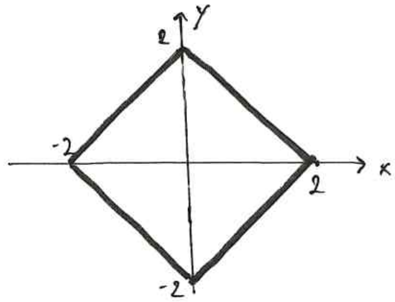
2. $B_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x_1+x_2| + |x_1| \leqslant 1\}$

$B_2 := \{ \text{—} \quad N_2(x) \leqslant 1 \}$





$\boxed{\text{Ex 3}}$: $N(u) = \frac{1}{2}\max(|x+y|, |x-y|)$



1. (a) classique (b)

2. (a) $\left\|\frac{u}{\|u\|}\right\| = \frac{\|u\|}{\|u\|} = 1$

(b) $S_{N_1}(0,1) = S_{N_2}(0,\alpha)$

Soit $u \neq 0$. $N_1\left(\frac{u}{N_1(u)}\right) = 1 \Rightarrow N_2\left(\frac{u}{N_1(u)}\right) = \alpha \Rightarrow N_1(u) = \alpha^{-1} N_2(u)$.

(c) On remarque que $S_N(0,1) = S_{\|\cdot\|_1}(0,2)$, donc $N(u) = 2^{-1}\|u\|_1 = \frac{1}{2}(|x|+|y|)$.

3. (a), (b), (c) : $N(x,y) = N(|x|,|y|) = \frac{1}{2}\max(||x|+|y||, ||x|-|y||)$
$= \frac{1}{2}||x|+|y|| = \frac{1}{2}(|x|+|y|)$.

$\boxed{\text{Ex 4}}$: 1. Non, pas défini sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$

2. Non, pas d'inégalité triangulaire (ni d'homogénéité)
$N(1+1) = 4$, $N(1) = 1$.

3. Non, $N(f) = 0 \nRightarrow f = 0$

4. Oui, $\|\cdot\|_\infty$

5. Oui

6. Oui

7. Non, pas de séparation

8. Oui

9. Non, pas d'inégalité triangulaire

$N(1,1)=4$, $N(1,0)=N(0,1)=1$

Elle est d'ailleurs conversée : $N(u+v) \geq N(u)+N(v)$

$\boxed{\text{Ex 5}}$ 1. $(f,g) := \int_0^1 f(x)g(x)dx$

$(.,.)$ définit un produit scalaire, donc $\|.\|_2$ est une norme

2. $\|f\|_1 = (|f|,1) \leq \|f\|_2 \leq \| \, \|f\|_\infty \, \|_2 = \|f\|_\infty.$

$\|x \mapsto x^n\|_1 = \frac{1}{n+1}$, $\|x \mapsto x^n\|_2 = (2n+1)^{-\frac{1}{2}}$, $\|\dots\|_\infty = 1.$

$\boxed{\text{Ex 6}}$: $N_\infty(A) = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$

1. Norme : trivial. $N_\infty(AB) = \max_{i,j} \left| \sum_{k=1}^{N} a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq n \, N_\infty(A) N_\infty(B)$

2. Norme N sur $M_n(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ équiv. avec N_∞ $\Rightarrow$ $N(AB) \leq a N_\infty(AB)$

$\leq a n N_\infty(A) N_\infty(B)$

$\leq a b^2 n \, N(A)N(B).$

2. Suites d'éléments d'un evn

$\boxed{\text{Ex 7}}$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, $x_n \longrightarrow x \in E \Rightarrow \|x_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

En particulier $\|x_n - x\| \leq M \Rightarrow \|x_n\| \leq \|x\|+M.$

$\boxed{\text{Ex 8}}$: $A \in A_n(\mathbb{R})$, $A^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} B$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow A^{2k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} B$, donc ${}^tB = B$

$A^{2k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} B$ donc ${}^tB = -B$

$\Big\}$ $B=0$.

(le passage à la limite conserve la parité : on peut le montrer avec N_∞ p

$\boxed{\text{Ex 9}}$: $f_n(x) = x^{\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}} = \exp\left(\sqrt{\frac{n}{n^2+n}} \ln(x)\right)$, $f_n \in C([0;1];\mathbb{R})$.

Limite simple : $f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

* $\|.\|_1$: convergence dominée, $\left| \exp\left(\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} \ln(x)\right) \right| \leq 1.$

* $\|.\|_2$: idem

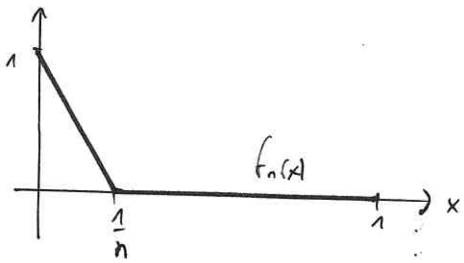
* $\|.\|_\infty$: $\|f_n - \mathbb{1}\|_\infty \geq |f_n(0) - 1| = 1.$ pas de CV.

Ex 10 : $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$

$$N(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx$$

1. OK

2. (a)



(b) $N(f_n) = \int_0^{\frac{1}{n}} e^x (1-nx) dx$

$$= \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) - n \left([x e^x]_0^{\frac{1}{n}} - \int_0^{\frac{1}{n}} e^x dx \right)$$

$$= e^{\frac{1}{n}} - 1 - n\left(\frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}} - 0 - e^{\frac{1}{n}} + 1\right)$$

$$= n\left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right) - 1 = o(1)$$

(c) $\|f_n\|_\infty = 1 \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$

(d) donc non.

Ex 11 : $E = \mathbb{R}[X]$, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $N(P) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \alpha_k |a_k|$, $N'(P) = \max |a_k|$

1. On suppose que N est une norme

$\Rightarrow \alpha_k > 0$ nécessairement

Réciproquement, cela suffit

2. $N(P_n) = \alpha_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

3. $Q_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$, soit $P \in E$, alors $\forall n > \deg(P)$,

$$N'(Q_n - P) \geq 1$$

donc (Q_n) ne converge pas.