TD 3 - Topologie des EVN

Analyse IV

1. Ouverts et fermés

Ex 1: 1. rien, fermé
2. ouvert
3. fermé
4. rien
5. rien → densité de $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
6. fermé → boule fermée euclidienne de rayon 5.

Ex 2: $t : E \longrightarrow E,\ u \longmapsto x_0 + u$

1. $U \subset E$ ouvert, $T(x) \in T(U)$, $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(x, \varepsilon) \subset U$

alors $T(B(x,\varepsilon)) = B(x+x_0, \varepsilon)$ voisinage de $T(x)$ dans $T(U)$

$\Rightarrow T(U)$ ouvert

2. $T(E\setminus F) = E \setminus T(F)$ d'où le résultat.

Ex 3: 1. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ est ouvert...
2. Suite d'entiers convergeant dans $\mathbb{R}$ → limite entière.
$|x_n - x| < \frac{1}{2}$ $\forall n \geq N \Rightarrow$ suite constante.

Ex 4: 1. Caractérisation séquentielle : CVU $\Rightarrow$ CVS,

F est fermé.

2. Fonction continue sur un compact $\Rightarrow$ bornée $\Rightarrow f - \varepsilon > 0$
fermé + borné (cours)

Ex 5: 1. $A = \{ (u_n)$ croissantes $\}$

Caractérisation séquentielle... CVU $\Rightarrow$ CVS, la monotonie passe à la limite.

2. $B = \{ (u_n)$ CV vers $0 \}$. Caractérisation séquentielle :

$\|u^{(k)} - u\|_\infty \leq \varepsilon$ pour un certain k, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - u_n^{(k)}| \leq \varepsilon$

en particulier, $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq 2\varepsilon$

3. Pas un fermé. Caractérisation séquentielle :

$$u_n^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq k \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases} \xrightarrow{\text{CVU}} u_n = \frac{1}{n}$$

$E\setminus C$ est un ouvert : soit $(u_n) \in E\setminus C$, si $u_n + \sigma \in C$

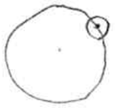
alors $u_n + \varepsilon \notin C$ $\forall |\varepsilon| < \sigma$.

2. Intérieur, adhérence, et densité.

Ex 6: Soit $\overline{B}$ une boule fermée, B la boule ouverte de même rayon.

Clairement, $B \subset \overline{B}$, donc $B \subset \mathring{\overline{B}} = \bigcup_{\substack{U \subset \overline{B} \\ U \text{ ouvert}}} U$

On suppose que $x \in E\setminus B$ est dans $\mathring{\overline{B}}$. Alors il existe U ouvert dans $\overline{B}$ tq $x \in U \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tq $B(x,\varepsilon) \subset \overline{B} \setminus B$



Or, $\exists\, y \in B(x,\varepsilon) : |y - x_0| \geq R + \frac{\varepsilon}{2}$, exclu.

donc $\mathring{\overline{B}} = B$.

$\boxed{\text{Ex 7}}$: 1. $A \subset B$, $\forall U$ ouvert $\subset A$, on a $U \subset B$, donc

$\bigcup_{\substack{U \subset A \\ \text{ouvert}}} U \subset \mathring{B}$, $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

idem $\overline{A} \subset \overline{B}$. (d'ailleurs $\overline{A} = (\mathring{E \setminus A})$)

2. * $\mathring{\widehat{A \cap B}}$, $\mathring{A} \cap \mathring{B}$, $\mathring{A}$ ouvert $\subset A$, $\mathring{B} \subset B \Rightarrow \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \mathring{\widehat{A\cap B}}$.
En outre, $\mathring{\widehat{A\cap B}} \subset A$, $\mathring{\widehat{A\cap B}} \subset B$, d'où $\mathring{\widehat{A\cap B}} \subset \mathring{A}$ et $\subset \mathring{B}$, donc $\subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

* $\mathring{\widehat{A \cup B}}$, $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ idem, $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \mathring{\widehat{A\cup B}}$, mais pas d'égalité, $A = [0,1]$, $B = [1;2]$

3. * $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, idem, $\overline{A\cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

car $A \subset \overline{A}$ fermé, $B \subset \overline{B}$ fermé, $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ fermé

Contre exemple pour l'égalité : $]0,1[$, $]1;2[$.

* $\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ pour les mêmes raisons

En outre, $\begin{cases} A \subset \overline{A\cup B} \\ B \subset \overline{A \cup B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \overline{B} \subset \overline{A\cup B} \end{cases} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

d'où l'égalité

On aurait pu répondre à 3. grâce à 2. et $(\overline{A})^c = (\mathring{A^c})$.

$\boxed{\text{Ex 8}}$: * $A = \overline{B}(0,1) \setminus \{0\}$, $\overline{A} = \overline{B}(0,1)$, $\mathring{A} = B(0,1) \setminus \{0\}$, $\partial A = S(0,1) \cup \{0\}$

ni ouvert ni fermé

* $B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}),\ n,m \in \mathbb{N}^*\}$, $\overline{B} = B \cup \{(0;\frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(\frac{1}{m}, 0), m \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$

ni ouvert ni fermé.

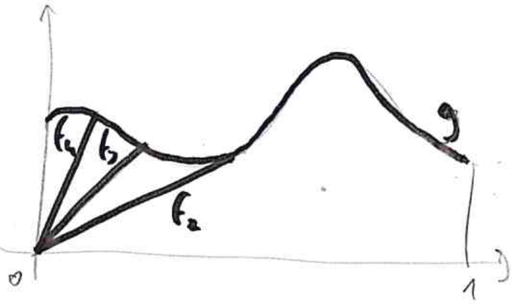
$\mathring{B} = \emptyset$, $\partial B = \overline{B}$

Pour mq $\overline{B} = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}),\ n,m \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}\}$, on a une inclusion évidente (limite des suites), et on montre que c'est un fermé en prouvant que son complémentaire est ouvert.

$\boxed{\text{Ex 9}}$: $E = C([0;1], \mathbb{R})$, $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$

1. CVU $\Rightarrow$ CVS, d'où F séquentiellement fermé
2. (a) $g \in E$, $f_n(t) = \begin{cases} n t g(\frac{1}{n}) & \forall t \in [0;\frac{1}{n}] \\ g(t) & t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$.

f_n est C^0, et $f_n(0) = 0 \Rightarrow (f_n) \subset F$.



(b) $|f_n| \le \|g\|_\infty \in L^1([0;1])$

$f_n \xrightarrow{CVS} g$ sur $]0;1]$

donc (CVD) $\|f_n - g\|_1 \longrightarrow 0$.

(c) $\bar{F} = E$, or $F \neq E$ donc F n'est pas fermé, mais dense.

Ex 10 : $F \subset E$ evn

1. Séquentiellement, $\bar{F} = \{$limites de suites de $F\}$, et la limite est bien linéaire $\Rightarrow$ $\bar{F}$ est un sev de E.

2. $\mathring{F} \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, B(x,\varepsilon) \subset F \Rightarrow B(0,\varepsilon) \subset F$ translation

$\Rightarrow B(0,R) \subset F \quad \forall R > 0$

$\Rightarrow E \subset F$.

$F \subset E$ ouvert $\Rightarrow \mathring{F} = F$. Soit $F = \emptyset$, soit $F \neq \emptyset$ auquel cas $\bar{F} = E$.

3. On a : $H \subset \bar{H} \subset H \oplus \langle a \rangle = E$

Deux cas : soit $a \in \bar{H}$, alors $\bar{H} = E$

soit $a \notin \bar{H}$, alors $\bar{H} \oplus \langle a \rangle = E$ et donc $H = \bar{H}$.

autre manière de le voir : soit $H = \bar{H}$,

soit $\exists\, y \in \bar{H} \setminus H$, $\varphi(y) \neq 0$,

$\underbrace{y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(a)} a}_{\in H} + \underbrace{\frac{\varphi(y)}{\varphi(a)} a}_{\in \langle a \rangle}$

$\Rightarrow \frac{\varphi(y)}{\varphi(a)} a \in \bar{H}$

$\Rightarrow a \in \bar{H}$.

3. Compacts

Ex 11 : 1. Fermé + borné, $x^2 \le 1$, $y^4 \le 1$.

2. Fermé, non borné : $x = \sqrt{2 - y^5}$, $y \to -\infty$, branche infinie

3. Fermé

$1 \geq x^2 + xy + y^2 \geq x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \Rightarrow$ borné

4. $x = -y \Rightarrow x^2 - 8x^2 + x^2 = -6x^2 \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ non borné

5. $y^2 = x(1-2x) \Rightarrow x(1-2x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0; \frac{1}{2}]$

$\Rightarrow y^2 \le \frac{1}{8}$, $|y| \le \frac{1}{2\sqrt{2}}$. $\Rightarrow$ compact.

Ex 12 : $(E = C([0;2\pi], \mathbb{R}), \|.\|_2)$, $f_n(x) = e^{inx}$.

1. $\|f_n - f_p\|_2^2 = \|f_n\|_2^2 + \|f_p\|_2^2 - 2(f_n, f_p)$

$= 4\pi - 2\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)x}\,dx$

$= 4\pi(1 - \delta_{n,p})$

2. $\overline{B(0_E,1)}$ compacte $\Rightarrow$ séq. compacte (B.W)

$\Rightarrow$ Sous-suite extraite de (f_n) CV

$\Rightarrow$ de Cauchy $\Rightarrow$ exclu.

Note : Th de Riesz : $\overline{B(0_E,1)}$ compacte $\Leftrightarrow$ $\dim(E) < +\infty$.

Ex 13 : 1. A compact, B fermé. Soit $(a_n+b_n) \subset A+B$ convergeante.

BW : $a_{\varphi(n)} \to a \in A$, $a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)} \to c \Rightarrow b_{\varphi(n)} \to c-a$

$\Rightarrow c-a \in B$

$\Rightarrow c = a + (c-a) \in A+B$

2. A compact, B compact, $(a_n+b_n) \subset A+B$

$a_{\varphi(n)} \to a \in A$, $(b_{\varphi(n)}) \subset B \Rightarrow b_{\varphi(\psi(n))} \to b \in B$

$a_{\varphi(\psi(n))} \to a$

$\Rightarrow a_{\varphi(\psi(n))} + b_{\varphi(\psi(n))} \to a+b \in A+B \Rightarrow$ compact.

(sinon, $f : E\times E \to E$, $(x,y) \mapsto x+y$ est C^0, $A\times B$ est compact dans $E\times E$

$\Rightarrow A+B$ ——— E)

3. $A = \mathbb{R}\times\{0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$.

A, B graphes de fcts $C^0 \Rightarrow$ fermés.

$A+B = \mathbb{R}^2 \setminus A$, ouvert.

Ex 14 : $(E, \|.\|)$, X compact. $Y \subset X$ fermé dans E

$\Rightarrow$ séquentiellement, Y est compact.