TD 4 - Séries de fonctions

Analyse IV

$\boxed{\text{Ex 1}}$: 1. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$

* $f_n(1) = \dfrac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$

$x > 1 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

} pas de CVS de la série sur $[1;+\infty[$.

(ni de CVU, ni de CVN).

$x \in]0;1[\Rightarrow f_n(x) \sim x^n \Rightarrow$ CVS

$f_n(0) = 0$, CVS.

Donc on a CVS sur $[0;1[$, mais pas sur $[0;+\infty[$.

* Sur $[0;1[$: on a montré la CVS. Étudions la CVU :

$\sum f_n$ CVU sur $[0;1[\Leftrightarrow (\sum f_n$ CVS et R_n CVU vers $0)$

Or, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k\geqslant n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^k} \geqslant \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}$, donc

$\|R_n\|_{L^\infty([0;1[)} \geqslant \dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ donc pas de CVU

* Soit $a \in [0;1[$. Sur $[0;a]$, $R_n(x) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$

donc $\|R_n\|_{L^\infty([0,a])} \leqslant \dfrac{a^{n+1}}{1-a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d'où $\sum f_n$ CVU.

$\|f_n\|_{L^\infty([0;a])} \leqslant a^n$, d'où $\sum f_n$ CVN $(\Rightarrow \sum f_n$ CVU$)$.

---

2. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$ * $f_n(0) = 0$, et $f_n(x) \sim \dfrac{x^2}{n^3}$ lorsque $x > 0$, donc

$\sum f_n$ CVS sur $[0;+\infty[$.

* $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^2}{k^3+x^3} \geqslant \int_{n+1}^{+\infty} \frac{x^2}{t^3+x^3}\,dt \geqslant \int_n^{+\infty} \frac{x^2}{(t+x)^3}\,dt = x^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{(n+x)^2}$

$\Rightarrow \|R_n\|_\infty \geqslant \dfrac{1}{2}$, pas de CVU, ni CVN.

* Sur $[0;a]$: On va montrer la CVN : $f_n'(x) = \dfrac{2x(n^3+x^3) - 3x^2 \cdot x^2}{(n^3+x^3)^2}$

du signe de $2xn^3 - x^4$

x	0		$2^{1/3}n$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$		$\nearrow$	$\|f_n\|_\infty$	$\searrow$	

$\|f_n\|_{L^\infty([0;a])} = \begin{cases} \dfrac{2^{2/3}}{3} \dfrac{1}{n} & \text{lorsque } a \geqslant 2^{1/3} n \\ \underbrace{\dfrac{a^2}{n^3+a^3}}_{\sim \frac{a^2}{n^3}} & \text{lorsque } a < 2^{1/3} n \end{cases}$

donc CVN (Riemann) $\to$ CVU.

3. $f_n(x) = \frac{x}{n^3+x^{3/2}}$ sur $[0;+\infty[$. cf 2., $f_n^{(3.)}(x) = f_n^{(2.)}(\sqrt{x})$

$\boxed{\text{Ex 2}}$: $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$

1. CSA : $\sum f_n(x)$ converge $\Rightarrow$ CVS de $\sum f_n$ partout

2. $|R_n(x)| \leqslant |f_n(x)| = \frac{x^2}{x^4+n}$ (séries alternées)

$\Rightarrow \|R_n\|_\infty \leqslant \|f_n\|_\infty = ?$ $\quad |f_n|'(x) = \frac{2x}{(x^4+n)^2}(n-x^4)$, $\|f_n\|_\infty = |f_n|(n^{\frac{1}{4}}) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$

donc $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\sum$ CVU.

3. Soit $A \subset \mathbb{R}^*$ non vide, et $x \in A$.
Alors $\|f_n\|_{L^\infty(A)} \geqslant |f_n(x)| = \frac{x^2}{x^4+n} \sim \frac{x^2}{n}$, série divergente, donc pas de CVN.

$\boxed{\text{Ex 3}}$: $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$

1. $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^3} \Rightarrow$ CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ CVS

2. CVU de $\sum_{n=1}^{N} f_n$ vers la somme $f \Rightarrow$ continuité.

3. CVU sur $[0,\pi] \Rightarrow \int_0^\pi \sum = \sum \int_0^\pi = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n^3}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}[-\cos(nt)]_0^\pi$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}(1-\cos(n\pi)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n-1)^4}$

4. f_n C^1, $\|f_n'\|_\infty = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ CVN $\Rightarrow$ CVU sur $\mathbb{R}$.
$\sum f_n$ CVS + $\sum f_n'$ CVU $\Rightarrow f$ est C^1 et $f' = \sum f_n'$

$f'(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$

$\boxed{\text{Ex 4}}$: $\varphi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$, $x \in \mathbb{R}_+$

1. $\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2x}{(n^2-x^2)}$, nécessairement $x \notin \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
Si $x \notin \{2,3,\dots\}$, $x \neq 0$, alors $\frac{2x}{n^2-x^2} \sim \frac{2x}{n^2} \Rightarrow$ CVS, φ est bien définie.
pour $x=0$ aussi, donc $\mathrm{Dom}(\varphi) = \mathbb{R}_+ \setminus \{2,3,\dots\}$.

2. $f_n(x) = \frac{2x}{n^2-x^2}$, $\|f_n\|_{L^\infty([0;1])} = \frac{2}{n^2} \Rightarrow$ CVN $\Rightarrow$ CVU

et $\int_0^1 \varphi = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 f_n = \sum_{n=2}^{+\infty} [-\log(n-x)]_0^1 - [\log(n+x)]_0^1$

$= \sum_{n=2}^{+\infty} \log(n) - \log(n-1) - \log(n+1) + \log(n)$

$$\int_0^1 \varphi = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=2}^{N} 2\log(n) - \log(n+1) - \log(n-1)\right)$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(\log(2) + \log(N) - \log(1) - \log(N+1)\right)$$

$$= \log(2).$$

$\boxed{Ex\ 5}$: $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$

$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n} \Rightarrow$ CVS, pas de pb

CVU car $\|R_n\|_\infty \leqslant \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow f$ est C^0

$f_n'(x) = \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2} \Rightarrow$ CVS, puis CVU $\Rightarrow C^1$

$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k k! \frac{(-1)^n}{(x+n)^{k+1}} \Rightarrow C^k$ par récurrence. $f \in C^k\ \forall k$ $\Rightarrow f \in C^\infty$.

$\boxed{Ex\ 6}$: $u_n(x) = \frac{2x}{x^2+n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

1. CVS comme d'habitude

2. Sur $[-a;a]$, $\|u_n\|_{L^\infty([-a;a])} \leqslant \frac{2a}{n^2}$, CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ somme C^0 sur tout $[-a;a]$, donc sur $\mathbb{R}$.
$(a>0)$

3. Comparaison série - intégrale:

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{2x}{x^2+t^2}\,dt} \leqslant S(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2+t^2}\,dt = 2x\left[\frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(0)\right)$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\pi - 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant S(x) \leqslant \pi \Rightarrow S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi - 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

$\boxed{Ex\ 7}$: $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définies sur $I \subset \mathbb{R}$ intervalle.

$f_n(x) = a_n(x)\, b_n(x)$,

i/ $(a_n(x))$ décroît et est $\geqslant 0$

ii/ $a_n \xrightarrow{CVU} 0$

iii/ $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_n$ unif. bornée par M.

1. $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $B_{-1} := 0$, $b_n = B_n - B_{n-1}$, $\|b_n\|_\infty \leqslant 2M$.

2. $n \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$, $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right|$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\left(B_k(x) - B_{k-1}(x)\right)\right|$$

$$\sum_{h=n+1}^{n+p} a_h(x)\left(B_h(x)-B_{h-1}(x)\right) = \sum_{h=n+1}^{n+p} a_h(x)\,B_h(x) - \sum_{h=n}^{n+p-1} a_{h+1}(x)\,B_h(x)$$

$$= - a_{n+1}(x)\,B_n(x) + a_{n+p}(x)\,B_{n+p}(x) + \sum_{h=n+1}^{n+p-1} B_h(x)\left(a_h(x)-a_{h+1}(x)\right)$$

$$|\ \cdots\ | \leqslant M\left(a_{n+1}(x) + a_{n+p}(x) + \sum_{h=n+1}^{n+p-1} a_h(x) - a_{h+1}(x)\right)$$

$$= 2M\,a_{n+1}(x)$$

3. Le critère de Cauchy sur les séries numériques permet de dire que $f=\sum f_n$ est définie sur I tout entier. Alors

$$R_n(x) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{h=n+1}^{n+p} f_n(x) \quad , \text{ et donc } \|R_n(x)\|_\infty \leqslant 2M\,\|a_{n+1}\|_\infty$$

d'où la CVU.

$\boxed{\text{Ex } 8}$ $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n+x}$, $x \in [+\frac{\pi}{2}, +\pi] = I$

1. $a_n(x) = \dfrac{1}{n+x}$, $b_n = \sin(nx)$

i/ $(a_n(x)) = \left(\dfrac{1}{n+x}\right)$ positive et décroissante

ii/ $\|a_n\|_\infty = \dfrac{1}{n+\frac{\pi}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

iii/ $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \sin(nx) = \mathrm{Im}\left(\sum e^{inx}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}}\right) =$ $(x \neq 0)$ mod 2π

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\frac{N+1}{2}x}}{e^{ix/2}}\ \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{N}{2}x\right)\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{N} b_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}.$$

D'où CVU sur I.

2. $f_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1+\frac{\pi}{2}} = \dfrac{(-1)^n}{2n+1+\frac{\pi}{2}}$

donc $\sum \|f_n\|_\infty = +\infty$.

$\boxed{\text{Ex } 9}$: $f_n(t) = \dfrac{(-1)^n e^{-nt}}{n+1}$

1. (a) $|f_n(t)| = \dfrac{e^{-nt}}{n+1}$ décroissant vers $0 \Rightarrow$ CSA : on a la CVS. sur $[0;+\infty[$.

~~simplement~~ $\cancel{e^{-nt} = o\left(\frac{1}{n}\right)}$

(b) $t > 0 \Rightarrow |f_n(t)| = \dfrac{e^{-nt}}{n+1} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ sommable

(c) CSA : $\|R_n\|_{L^\infty([0;+\infty[)} \leq \|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc CVU.

(d) $\|f_n\|_{L^\infty([0;+\infty[)} = \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow$ pas de CVN.

$= \|f_n\|_{L^\infty(]0;+\infty[)}$ par C^0

2. CVU sur $[0;+\infty[$ $\Rightarrow$ on peut intervertir limite et $\sum$

$$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \sum_{n \geq 0} f_n(t) = \sum \lim_{t \to +\infty} \frac{(-1)^n e^{-nt}}{n+1}$$
$$= 1 = \left(\lim_{t \to +\infty} f_0(t)\right).$$

3. $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

$|f_n(t)|$ est décroissante sur $\mathbb{R} \Rightarrow \|f_n\|_{L^\infty(A)} = |f_n(\inf(A))|$ avec la convention $|f_n(-\infty)| = +\infty$. On voit donc immédiatement que $\sum \|f_n\|_{L^\infty(A)}$ converge ssi $\inf(A) > 0$.

$\boxed{\text{Ex 10}}$ $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx^2/2}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé

1. $e^{-t} = O\left(\dfrac{1}{t^k}\right)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ lorsque $t \to +\infty$.

Alors $n^\alpha x e^{-nx^2/2} = n^\alpha x \cdot O\left(\dfrac{1}{n^k x^{2k}}\right)$ lorsque $x \neq 0$ et $n \to +\infty$

$= O(n^{\alpha - k})$

on choisit ~~pour conclure par Riemann~~ $k > \alpha$ pour conclure, en notant que $f_n(0) = 0$.

2. $f_n'(x) = n^\alpha \left(e^{-nx^2/2} - nx^2 e^{-nx^2/2}\right) = 0 \iff x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

donc $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = n^{\alpha - \frac{1}{2}} e^{-1}$

On a CVU de la suite ssi $\alpha < \dfrac{1}{2}$

3. Soit $h > 0$. D'après l'étude de fonction du 2., ~~Alors~~ on a :

$$\|f_n\|_{L^\infty([h;+\infty[)} = \begin{cases} n^{\alpha - \frac{1}{2}} e^{-1} & \text{si } h \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ n^\alpha h e^{-nh^2/2} & \text{si } h > \frac{1}{\sqrt{n}} \iff n > \frac{1}{h^2} \end{cases}$$

donc $\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

4. (γ) $\alpha = 1$, d'après 1., $f_n(x) = O(n^{1-h})$ $\forall h$

donc $h=3$ permet de conclure par Riemann

Mieux, on a la CVN sur $[h;+\infty[$ $\forall h>0$

$\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ C^0 sur $[h;+\infty[$ $\forall h>0$

$\Rightarrow$ C^0 sur $]0;+\infty[$.

(b) $S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} n x e^{-nx^2/2}$ $\qquad S_m(0)=0. \Rightarrow S(0)=0$

$x>0$ $\qquad = -\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{m} e^{-nx^2/2}\right) = -\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2} \frac{1-e^{-mx^2/2}}{1-e^{-x^2/2}}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-(m+1)x^2/2} - e^{-x^2/2}}{1-e^{-x^2/2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-mx^2/2}-1}{e^{x^2/2}-1}\right)$

$= \frac{-mxe^{-mx^2/2}(e^{x^2/2}-1) - x(e^{-mx^2/2}-1)(e^{x^2/2})}{(1-e^{-x^2/2})^2}$

$\xrightarrow[m\to+\infty]{} x\frac{e^{x^2/2}}{(1-e^{-x^2/2})^2} = S(x)$

(c) $S(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, pas de continuité.

$\boxed{\text{Ex 11}}$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{e^{-x\sqrt{n}}}_{f_n(x)}$

1. $x>0 \Rightarrow f_n(x) = O\left(\frac{1}{x^4 n^2}\right) \Rightarrow$ CVS $\Big\}$ $D_f = \mathbb{R}_+^*$.
   $x\leq 0 \Rightarrow f_n(x) \geq 1 \Rightarrow$ diverge grossièrement
2. Soit $h>0$, $\|f_n\|_{L^\infty([h;+\infty[)} = f_n(h) = e^{-h\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
   donc CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ C^0 sur $[h;+\infty[$ $\forall h>0$
   $\Rightarrow$ C^0 sur $\mathbb{R}_+^* = D_f$.
3. $f_n'(x) = -\sqrt{n}e^{-x\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ unif en x sur $[h;+\infty[$
   $\Rightarrow$ f est C^1 sur $[h;+\infty[$ $\forall h>0$ donc sur D_f
   et $f'(x) = \sum_{n\geq 0} f_n'(x) = \sum_{n\geq 1} -\sqrt{n}e^{-x\sqrt{n}} < 0$
4. CVU $\Rightarrow$ on peut intervertir lim et $\sum$ $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
5. Comparaison série / intégrale : $x>0$,
   $\underbrace{u_0(x)}_{=1} + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}dt \geq f(x) \geq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}dt = I(x)$
   $I(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt = \frac{2}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = \frac{2}{x^2}$

   donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}$