TD 6

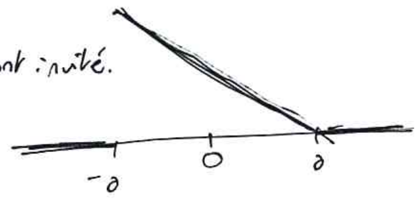
Continuité des fonctions vectorielles

Ex 1 : $(E, \|\cdot\|)$ 1. $U = \{x \in E \,/\, \|x\| < \|a\|\} = B(0, \|a\|)$ est ouvert
$V = \{x \in E \,/\, \|x\| > \|a\|\} = \left(\overline{B(0,\|a\|)}\right)^c$ est ouvert

2. Sur U, $f(x) = \|x - a\|$, sur V, $f(x) = 0$. Or $\|\cdot\|$ est C^0, d'où la C^0.

3. $f(a) = 0$. Soit $x \in B(a, \varepsilon)$. Alors $f(x) = 0$ ou ε, dans tous les cas $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$
d'où la continuité.

$f(-a) = 2\|a\| > 0$ $\quad f(-(1+h)a) = 0 \quad \forall h > 0$, d'où la discontinuité.



Ex 2 : 1. Soient $x, y \in E$, et $\varepsilon > 0$

$$\big|\|x - a\| - \|y - a\|\big| \leq \|x - y\|$$

~~Soit $a \in A$ tq $\|x - a\| < d_A(x) + \varepsilon$~~

~~$\|y - a\| - \|x - a\| \leq \|x - y\| \Rightarrow \|y - a\|$~~
~~$\|y - a\| \leq \|x - y\| + d_A(x) + \varepsilon$~~

~~$\|x - y\| \leq \|x - a\| + \|y - a\| \quad \forall a \in A$, en particulier~~

$d_A(y) \leq \|y - a\| \leq \|x - a\| + \|x - y\| \quad \forall a \in A$

$$\Rightarrow d_A(y) \leq \|x - a\| + \|x - y\| \;\; \forall a \Rightarrow d_A(y) - d_A(x) \leq \|x - y\|$$

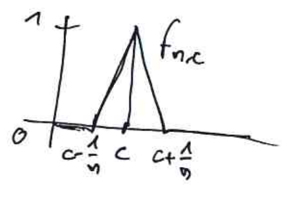
et inversement $\Rightarrow$ d_A est 1-lipschitzienne donc continue.

2. Par continuité de $\|\cdot\|$.

Ex 3 : $E = (C^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$

1. $c \in [0,1]$, $\delta_c : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(c) \end{array}$ clairement une forme linéaire

mais $\delta_c(0) = 0$, et $\delta_c(f_{n,c}) = 1$, $\|f_{n,c}\| \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.



2. $\mu : \begin{array}{l} E \to E \\ f \mapsto \mu(f) \end{array}$ $\quad \mu(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

(a) aucun problème : les fonctions sont C^0 donc intégrables, et $\mu(f)$ est C^1 donc C^0. L'intégrale est linéaire

(b) $f_n(t) = n(1-t)^{n-1}$ $\quad \|f_n\| = \int_0^1 n(1-t)^{n-1} = [-(1-t)^n]_0^1 = 1$.

$\mu(f_n)(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt = 1 - (1-x)^n$, $\quad \|\mu(f_n)\| = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Or, si $f \in E$, $(\|f\| = 1)$, $\|\mu(f)\| \leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right) dx$
$\leq \|f\|$

$\boxed{\text{Ex 4}}$: $(\mathbb{R}[X], \|.\|_\infty)$, $\phi_c : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \longmapsto P(c)$, $c \in \mathbb{R}$.

ϕ_c est clairement une forme linéaire.

$c \geq 1 \Rightarrow$ on regarde $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} X^k$. Alors $\|P_n\|_\infty = 1$ et $\phi_c(P_n) \geq n+1 \longrightarrow +\infty$

$c \leq -1$ ——— $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k X^k$ ———

donc ϕ_c $C^0 \Rightarrow |c| < 1$. Réciproquement, si $|c| < 1$, et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

$$|\phi(c)| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| |c|^k \leq \|P\|_\infty \frac{1-|c|^{n+1}}{1-|c|} \leq \frac{\|P\|_\infty}{1-|c|}$$

et ϕ_c est C^0, et $|||\phi_c||| \leq \frac{1}{1-|c|}$. Si $c \in [0;1[$, on considère P_n comme avant, alors $|\phi(P_n)| = \frac{1}{1-|c|} |c|^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1-|c|}$ d'où $|||\phi_c||| = \frac{1}{1-|c|}$

idem lorsque $c \leq 0$.

$\boxed{\text{Ex 5}}$: 1. $N(x) = \|x\| + |f(x)| \geq 0$, linéarité OK, $\underset{=0}{N(0)} \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ séparation OK

$N(x+y) \leq \|x\| + \|y\| + |f(x)| + |f(y)|$ OK.

2. N est une norme, donc équivalente à $\|.\|$, et donc continue par rapport à cette norme. Alors $|f|$ est C^0 comme la diff. de deux normes.

en particulier, f est bornée sur $B(0,1)$ donc continue

$\boxed{\text{Ex 6}}$: $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$P \longmapsto (P(-1)^2 + P'(0)^2 + P''(1)^2)^{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} P(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}}_{\|P\|}$$

est une norme, donc $\sim$ à $\|.\|$ puisque dim $< +\infty$. Alors

$\varphi(P) \leq \underset{(\sqrt{C}-1)}{\cancel{}} \|P\|$ pour un certain $C > 1$.

donc $P(-1)^2 + P'(0)^2 + P''(1)^2 \leq C\|P\|^2$. $\square$