TD n°8

Ex 1 : f est C^∞, donc admet un DL d'ordre 2, $f(x,y) = e^{x^2+xy+y^2}$

$$f(x,y) = f(0,0) + df_0(x,y) + \frac{1}{2} d^2f_0(x,y)_{(x,y)} + o(\|(x,y)\|^2)$$

$$= 1 + \nabla f(0,0)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}(x,y)^t H(0,0)(x,y) + o(1$$

$$\nabla f(a,b) = ((2a+b)f(a,b),\ (2b+a)f(a,b)) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$\partial_{xx} f(a,b) = 2f(a,b) + (2a+b)^2 f(a,b) \Rightarrow \cancel{\partial_{xx}} \quad H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\partial_{xy} f(a,b) = f(a,b) + (2a+b)(2b+a) f(a,b)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} + o(1) = 1 + (x^2+xy+y^2) + o(1.$$

Ex 2 : $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2x^2 + 2$

1. D une droite passant par $(0,0)$ $\Rightarrow$ $D = \{(tx,ty),\ t\in\mathbb{R}\}$

$f|_D =: g$, $g(t) = f(tx,ty) = t^3(x^3+xy^2) - 2t^2x^2 + 2$

$x = 0 \Rightarrow g(t) = 2$, donc OK, maximum local en l'origine.

$$g'(t) = x\left(3t^2(x^2+y^2) - 4tx\right)$$

$$g''(t) = x\left(6t(x^2+y^2) - 4x\right)$$

$g'(0) = 0$, $g''(0) = -4x^2 < 0$, donc max local en l'origine

2. DL à l'ordre 2 : $f(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}(x,y)\,H(0,0)\binom{x}{y}$

$$= 2 + 0 + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\binom{x}{y} + o(\|(x,y)\|^2)$$

$$= 2 - 2x^2 + o(\|x,y\|)^2 \Rightarrow \text{permet pas de conclure}$$

$y = \sqrt{x} \Rightarrow f(x,\sqrt{x}) = x^3 - x^2 + 2$

$y = x^\alpha \Rightarrow f(x,x^\alpha) = x^3 - 2x^2 + x^{1+2\alpha} + 2 = h(x)$, $h'(x) = 3x^2 - 4x + (1+2\alpha)x^{2\alpha}$

$\alpha > 0$
$x > 0$

$\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow h'(x) = 3x^2 - 4x + \frac{3}{2}x^{1/2}$

$h(x) \sim 2 + x^{1+2\alpha}$ dès que $\alpha < \frac{1}{2}$ donc pas un max local.

à y fixé, on cherche les variations de $x \mapsto f(x,y) = g_y(x)$

$$g_y'(x) = 3x^2 + y^2 - 4x$$

x		0		x_y	
$g_y'(x)$	$+$	$+$		$(-)$	$+$
$g_y(x)$	$\nearrow$			$\searrow$	$\nearrow$

$\Delta = 16 - 12y^2 > 0$ lorsque y petit

$x_y = \frac{4 - \sqrt{16-12y^2}}{6} > 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$ et $f(x_y,y) > 2$, donc $(0,0)$ pas max local

$\boxed{Ex3}$ $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$

1. extréma local $\Rightarrow \nabla f = 0$, $\nabla f(x,y) = (4x + 2xy^2 - 4x^3,\ 4y + 2yx^2 - 4y^3)$
$= (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-x^2) + xy^2 = 0 \\ 2y(1-y^2) + yx^2 = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0 \Rightarrow 2(1-x^2) + y^2 = 0$ $\qquad$ $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

~~$y \neq 0 \Rightarrow 2(1-y^2) + x^2 = 0 \Rightarrow$~~ $\qquad$ $y \neq 0 \Rightarrow 2(1-y^2) + x^2 = 0$

$\Rightarrow 4 - x^2 - y^2 = 0$

$\Rightarrow 2(1-x^2) + 1 + \frac{1}{2}x^2 = 0$, $3 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2$

et $y^2 = 2$

Les points d'annulation sont donc $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$

~~et $(2\cos(\theta), 2\sin(\theta))$, $\theta \in [0;2\pi]$.~~ $\qquad$ ~~$(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$~~,

$\pm(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $\pm(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

~~$4\cos(\theta)(1-4\sin^2(\theta)) + 8\cos(\theta)\sin^2(\theta)$~~

Hessienne ? : $H(x,y) = \begin{pmatrix} 4 + 2y^2 - 12x^2 & 4xy \\ 4xy & 4 + 2x^2 - 12y^2 \end{pmatrix}$

$H(1,0) = \begin{pmatrix} 4-12 & 0 \\ 0 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $H(0,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ $\Big\}$ pas extrema

$H(-1,0)$ idem $\qquad$ $H(0,-1)$ idem

$H(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 4+4-24 & 8 \\ 8 & 8-24 \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\det = 8^2 \cdot 3 > 0$, $Tr = 8(-4) < 0$

$H(\pm\sqrt{2}; \mp\sqrt{2}) = 8\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

donc : max local.
(vp de m̂ signe, puis <0)

2. $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$f(x,y) = 2r^2 - r^4(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) - \cos^2(\theta)\sin^2(\theta))$

$$\left.\begin{aligned} (1-\sin^2(\theta))^2 &= \sin^4(\theta) - 2\sin^2(\theta) + 1 \\ &+ \sin^4(\theta) \\ &- (1-\sin^2(\theta))\sin^2(\theta) \end{aligned}\right\} = 3\sin^4(\theta) - 3\sin^2(\theta) + 1$$

$\varphi(t) = 3t^2 - 3t + 1$, $\varphi'(t) = 6t - 3$

$\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	1

donc $f(x,y) \leqslant 2r^2 - \frac{r^4}{4}$

alors $f(x,y) \leqslant 4$ $\qquad$ $\psi(r) = r^2\left(2 - \frac{r^2}{4}\right)$, $\psi'(r) = 4r - r^3$
$= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 2 \end{cases}$ ou

$\psi(r) \leqslant 4$.

3. $f(x,y) \xrightarrow[\|(x,y)\| \to +\infty]{} -\infty$, donc par continuité, $\exists$ max global.

$\Rightarrow$ c'est un point critique, donc $(\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2})$

$f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 4+4+4-4-4 = 4$

$f(\pm x, \pm y) = f(x,y)$, donc ces 4 points sont des max globaux.

4. Non. Ni même local.

$\boxed{\text{Ex } 4}$: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x^2+y^2)y + x^2 + 9y^2$

1. $\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2xy + 2x = 0 \\ x^2 + 3y^2 + 18y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1+y) = 0 \\ \ldots \end{cases}$

$x = 0 \Rightarrow y^2 = -6y \Rightarrow y = 0$ ou $y = -6$

$x \neq 0 \Rightarrow y = -1$, et donc $x^2 + 3 - 18 = 0$, $x = \sqrt{15}$

$(0,0)$, $(0,-6)$, $(\sqrt{15}, 0)$.

$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y+2 & 2x \\ 2x & 6y+18 \end{pmatrix} \Rightarrow H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow$ min local (strict)

$H(0,-6) = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow$ max ———

$H(\sqrt{15}, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{15} \\ 2\sqrt{15} & 18 \end{pmatrix}$, $\det = 36 - 4 \cdot 15 = -24$

$\Rightarrow$ une vp >0, une vp $<0 \Rightarrow$ pt selle.

2. $f(0,y) = y^3 + 9y^2 \xrightarrow[y \to \pm\infty]{} \pm\infty$, pas d'extr. global

3. $D = \{(x,y), x^2+y^2 \leq 1\}$, $C = \{$ — $= 1\}$

(a) f continue sur D compact $\Rightarrow$ extrema globaux

(b) Sur C : $f(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \sin(\theta) + 8\sin^2(\theta) + 1$

$\Rightarrow f(0,1) = 10$, seule valeur max

$P(t) = 8t^2 + t + 1$

$P'(t) = 16t + 1$

t	-1		$-\frac{1}{16}$		1
$P'(t)$		$-$	0	$+$	
$P(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

min $P = P(-\frac{1}{16}) = \frac{2^3}{2^8} - \frac{1}{2^4} + 1$

$f\left(\frac{\sqrt{255}}{16}, -\frac{1}{16}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{255}}{16}, -\frac{1}{16}\right) = \frac{31}{32}$

(c) Sur D : si un extr. est atteint à l'intérieur, c'est un pt critique.
Il n'y a que $(0,0)$, $f(0,0) = 0 < \frac{31}{32}$ c'est donc le min
et le max est atteint sur le cercle, en $(0,1)$.

$\boxed{\text{Ex } 5}$ $g(x,y) = 3xy - 3x^2 - y^3$ sur $K = [-1;1]^2$.

Sur le bord : $g(-1,y) = -3y - 3 - y^3$, inf en $(-1,1)$, $g(-1,1) = -7$

max $g(-1,-1) = 1$

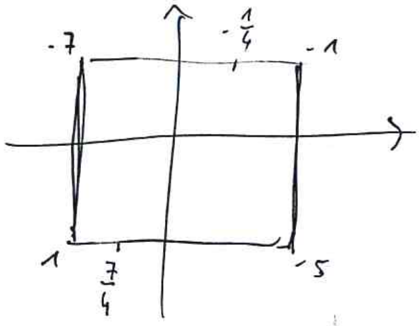
$g(1,y) = 3y - 3 - y^3 \Rightarrow$ croissante sur $[-1;1] \Rightarrow$ min $g(1,-1) = -5$

max $g(1,1) = -1$

$g(x,-1) = -3x - 3x^2 + 1$ min : $g(1,-1) = -5$

max $g(-\frac{1}{2},-1) = \frac{7}{4}$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$\frac{d}{dx} g(x,-1)$		$+$	0	$-$	
	1	$\nearrow$		$\searrow$	-5



$g(x,1) = 3x - 3x^2 - 1 \Rightarrow$ max : $g(\frac{1}{2},1) = -\frac{1}{4}$

min : $g(-1,+1) = -7$

points critiques ?

$\nabla g(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 6x = 0 \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3x - 12x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$

ou $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$

$H(x,y) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$, $H(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

det $= -9$

$\Rightarrow$ pt selle

$H(\frac{1}{4},\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, det $= 9$, Tr $< 0 \Rightarrow$ min local

$g(\frac{1}{4},\frac{1}{2}) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{16} - \frac{1}{8} = \frac{6}{16} - \frac{3}{16} - \frac{2}{16} = \frac{1}{16}$

max global en $(-\frac{1}{2},-1)$

min — $(-1,1)$

Ex 6 : $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2mxy + y^4 - 2x^2y^2$

1. $\nabla f(0) = 0$
2. $Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 - 4y^2 & 2m & 0 \\ 2m & 2 - 4x^2 + 12y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2m & 0 \\ 2m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2m \\ 2m & 2 \end{pmatrix}$ Tr $(A) = 4$, det $= 4(1 - m^2)$

$m^2 > 1 \Rightarrow H$ a deux vp > 0 et une < 0

$\Rightarrow$ selle

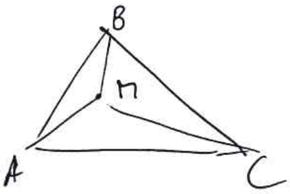
$m^2 < 1 \Rightarrow H$ a 3 vp $> 0 \Rightarrow$ min local

$m = 1 \Rightarrow f(x,y,z) = (x+y)^2 + z^2 + y^4 - 2x^2y^2 \Rightarrow$ pas un min local

$f(x,-x,z) = z^2 - x^4$

$m = -1 \Rightarrow f(x,x,z) = z^2 - x^4$ ——— idem

Ex 7 :



$$\nabla\left(\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}\right) = \left(\frac{(x-x_A)}{\|M-A\|}, \frac{(y-y_A)}{\|M-A\|}\right)$$

$$f(M) = \|AM\|^2 + \|BM\|^2 + \|CM\|^2$$

$$\cancel{\nabla f : \left(\frac{x-x_A}{\|AM\|} + \frac{x-x_B}{\|BM\|} + \frac{x-x_C}{\|CM\|}, \right) = 0}$$

$$\cancel{\iff x\left(\frac{1}{\|AM\|} + \frac{1}{\|BM\|} + \frac{1}{\|CM\|}\right) = \frac{x_A}{\|AM\|} +}$$

$$\nabla f = 2(x-x_A+x-x_B+x-x_C, y\dots) = 0$$

$$\iff x = \frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \quad y = \frac{y_A+y_B+y_C}{3},$$ M est le barycentre de (A, B, C)

$\left(f(x,y) \xrightarrow[\|(x,y)\| \to +\infty]{} +\infty\right.$, donc $\exists$ minimum global$\left.\right)$

Ex 8 : $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - y^2 - 1$ $\qquad$ f non différentiable en $(0,0)$

$f(0,y) \xrightarrow[y\to\pm\infty]{} -\infty$, $f(x,0) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$. Extremum local $\Rightarrow$ pt critique :

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y}{|y|} = 2y \end{cases} \iff x = 0 \text{ et } y = \pm\frac{1}{2}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} & \dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0, \pm\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - \frac{1}{4}\cdot 2^3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{min local}$$

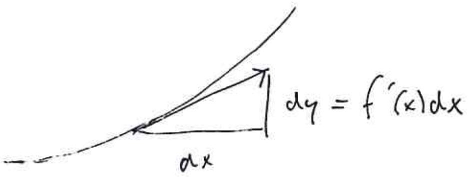
étude de $(0,0)$: en polaires : $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r - r^2\sin^2(\theta) - 1$
$= r(1 - r\sin(\theta)) - 1$

lorsque $0 < r < 1$, on a :

$f(x,y) > -1 = f(0,0) \Rightarrow$ min local.

$\boxed{\text{Ex 9}}$: $f(x,y) = e^{x-y} + xy^2$, $S = \{(x,y,z),\ z = f(x,y)\}$

plan tangent P à S en $(1,1,2)$; position relative de P p/r à S ?



$$\vec{T} = (1, f'(x))$$

Plan tangent : contient

$$T_1 = (1, 0, \partial_x f)$$
$$T_2 = (0, 1, \partial_y f)$$

vecteur normal : $\vec{n} = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1)$

$$\Rightarrow \vec{n} = (-1-1, 1-2, 1) = (-2, -1, 1)$$

donc $P = \{(x,y,z) \ / \ 2x + 2y - z = 0\} + \{(1,1,2)\}$

$$2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0$$

$$g(x,y) = 2(x-1) + 2(y-1) + 2$$

$$f(x,y) - g(x,y) = e^{x-y} + xy^2 - 2(x-1) - 2(y-1) - 2$$

$$e^{x-y} = e^{(x-1)} e^{-(y-1)} = (1 + (x-1) + O((x-1)^2))(1 - (y-1) + O((y-1)^2))$$
$$= 1 + x - 1 - y + 1 - (x-1)(y-1) + O..$$
$$= +1 + x - y - xy + x + y - 1$$

$$f(1+u, 1+v) - g(1+u, 1+v) = e^{u-v} + (1+u)(1+v)^2 - 2u - 2v - 2$$
$$= e^{u-v} + (1+u)(1+2v+v^2) - \_\_\_$$
$$= e^{u-v} + 1 + \cancel{2v} + v^2 + u + 2uv + uv^2 - 2u - \cancel{2v} - 2$$
$$= (e^{u-v} - 1) + v^2 - u + 2uv + uv^2$$

$$e^{u-v} = (1 + u + o(u))(1 + v + o(v))$$
$$= 1 + u + v + uv + o(u) + o(v) + o(uv)$$
$$= (1 + u + \frac{u^2}{2} + o(h^2))(1 - v + \frac{v^2}{2} + o(h^2))$$
$$= 1 + u - v - uv + \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} + o(h^2)$$

$$\Rightarrow f(\_\_) - g(\_\_) = \cancel{u} - v - uv + \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} + o(h^2) + v^2 - \cancel{u} + 2uv + uv^2$$
$$= -v + v^2/2 + u^2/2 + uv + o(h^2)$$