TD9 - Équations différentielles.

Ex 1 :

Supposons que $0 \notin I$. Alors l'équation devient

$$y'' + \frac{x-2}{x} y' - \frac{2}{x} y = 0$$: EDO linéaire homogène d'ordre 2

$\Rightarrow$ L'ensemble des solutions est un ev de dimension 2. On cherche

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \left((n+1)n\, a_{n+1} + n a_n - 2(n+1) a_{n+1} - 2a_n\right) x^n - 2a_1 - 2a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -a_0 \\ \cancel{}(n-2) a_{n+1} = -\dfrac{(n-2)}{n+1} a_n \end{cases}, n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = a_2 e^{-x} + (a_0 - a_2)(1-x)$$ (série entière de RCV $+\infty$)

C'est donc l'ensemble des solutions, puisque c'est un ev de dim 2.

$$S = \{x \mapsto a e^{-x} + b(1-x),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Supposons maintenant que $0 \in I$. On pose $I_- =]-\infty; 0[\cap I$, $I_+ = \mathbb{R}_+^* \cap I$

y est sol. sur $I \Rightarrow$ sol. sur I_+ et I_-, donc $\exists\, a, b, c, d$ tq

$$\forall x \in I_-,\ y(x) = ae^{-x} + b(1-x), \quad \forall x \in I_+,\ y(x) = ce^{-x} + d(1-x)$$

y deux fois dérivable sur $I \Rightarrow C^0$ en 0

$$y(0^-) = y(0^+) \Leftrightarrow a+b = c+d$$

$$y'(0^-) = y'(0^+) \Leftrightarrow -a-b = -c-d$$

$$\frac{y'(0) - y(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0^+]{} y''(0^+) = c$$

$$\frac{y'(0) - y(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0^-]{} y''(0^-) = a$$

$\Rightarrow$ ~~deux~~ deux fois dérivable en $0 \Leftrightarrow \begin{matrix} a = c \\ a+b = c+d \end{matrix}$

$\Leftrightarrow a = c,\ b = d$

Réciproquement, pas de problème, c'est bien une solution.

Ex 2 : $y'' + y = \dfrac{1}{\cos(x)}$, $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ (E)

Les solutions de (E_h) : $y'' + y = 0$ sont $S_h = \{x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x),\ A, B \in \mathbb{R}\}$

donc on cherche une solution de la forme

$$y(x) = A(x)\cos(x) + B(x)\sin(x)$$, où A et B sont dérivables.

Alors (variation des constantes), on peut résoudre :

$$\begin{cases} A'\cos + B'\sin = 0 \\ -A'\sin + B'\cos = \dfrac{1}{\cos} \end{cases}$$

Système d'équations à deux inconnues, $\begin{vmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{vmatrix} = 1$ donc

l'unique solution est $A' = \begin{vmatrix} 0 & \sin \\ 1/\cos & \cos \end{vmatrix} = -\dfrac{\sin}{\cos} = -\tan$

et $B' = \begin{vmatrix} \cos & 0 \\ -\sin & 1/\cos \end{vmatrix} = 1$.

Ainsi, $B(x) = x$ et $A(x) = \ln(\cos(x))$ conviennent,

$y_p(x) = \ln(\cos(x))\cos(x) + x\sin(x)$ est une solution particulière de (E).
(on peut le vérifier)

et alors $S = \{y_p\} + S_h$.

$\boxed{\text{Ex 3}}$: (E) : $xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = xe^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

EDO linéaire de degré 2.

1. $z = e^{-x}y \Rightarrow z'(x) = -e^{-x}y(x) + e^{-x}y'(x)$

$z''(x) = e^{-x}y''(x) - 2e^{-x}y'(x) + e^{-x}y(x)$

$= 1 + \frac{2(x-1)}{x}y'(x)e^{-x} - \frac{(x-2)}{x}y(x)e^{-x} - 2y'(x)e^{-x} + y(x)e^{-x}$

$= 1 + 2y'(x)e^{-x}\left(\frac{x-1-x}{x}\right) + y(x)e^{-x}\left(\frac{2}{x}\right)$

$= 1 + \frac{2}{x}\left(y(x)e^{-x} - y'(x)e^{-x}\right) = 1 - \frac{2}{x}z'(x)$

$xz'' + 2z' = x$

On regarde donc $xu' + 2u = x$ dont z' est solution :

$u_p(x) = \frac{x}{3}$ est sol. particulière

$S_0 = \{x \mapsto \frac{x}{3} + \frac{\lambda}{x^2}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

Ainsi, $z(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{\lambda}{x} + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

L'ensemble des sol. est donc $\{x \mapsto \left(\frac{x^2}{6} + \frac{\lambda}{x} + \mu\right)e^x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

2. $u = y' - y$

$xu' = x(y'' - y') = xe^x + 2xy' - 2y' - xy + 2y - xy'$

$= xe^x + xy' - xy - 2y' + 2y$

$= xe^x + (x-2)u$

$xu' - (x-2)u = xe^x$, de solutions homogènes $\{x \mapsto \lambda\frac{e^x}{x^2}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

Variation de la constante $\Rightarrow x\lambda'(x)\frac{e^x}{x^2} = xe^x \Rightarrow \lambda(x) = \frac{x^3}{3} + C$

donc $u(x) = \frac{xe^x}{3} + \lambda\frac{e^x}{x^2}$

$y' - y = \frac{xe^x}{3} + \lambda\frac{e^x}{x^2}$

Sol. homogène : $\{x \mapsto \mu e^x,\ \mu \in \mathbb{R}\}$

variation de la constante :

$$y(x) = \mu(x)e^x \Rightarrow \mu'(x) = \frac{x}{3} + \frac{\lambda}{x^2}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = \frac{x^2}{6} - \frac{\lambda}{x} + c$$

donc $S = \left\{x \mapsto \left(\frac{x^2}{6} + \frac{\lambda}{x} + \mu\right)e^x,\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\}$

3. On cherche une sp. de

$$(E_h) : xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = 0$$

$u_\alpha(x) := x^\alpha e^x$ est sol. de (E_h) $\iff$ $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1}e^x + 2\alpha x^\alpha e^x + x u_\alpha(x) - 2(x-1)\left(\alpha x^{\alpha-1}e^x + u_\alpha(x)\right) + (x-2)u_\alpha(x) = 0$

$$u_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}e^x + u_\alpha(x)$$

$$u_\alpha''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}e^x + 2\alpha x^{\alpha-1}e^x + u_\alpha(x)$$

$$\iff x^{\alpha-1}\left(\alpha(\alpha-1) + 2\alpha\right) + x^\alpha(2\alpha - 2\alpha + 2 - 2) + x^{\alpha+1}(1 - 2 + 1) = 0$$

$$\iff \alpha(\alpha+1) = 0 \iff \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -1.$$

donc on a l'ensemble des solutions de (E_h), puisque c'est une EDO linéaire homogène d'ordre 2 :

$$S_h = \left\{x \mapsto \left(\mu + \frac{\lambda}{x}\right)e^x,\ \mu,\lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

On cherche alors une sol. part. de (E), y de la forme

$$y(x) = \left(\mu(x) + \frac{\lambda(x)}{x}\right)e^x$$

variation des constantes :

$$\begin{cases} \mu'(x)e^x + \lambda'(x)\dfrac{e^x}{x} = 0 \\ \mu'(x)e^x - \lambda'(x)\left(\dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{e^x}{x}\right) = \dfrac{xe^x}{x} \end{cases}$$ (normalisation)

$\cancel{\det = e^{2x}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) \neq 0}$ ~~et donc~~ $\cancel{\mu'(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^x/x \\ xe^x & -e^x/x^2 \end{vmatrix} \neq -e^{2x}}$

$\cancel{\mu'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x/x \\ xe^x & -e^x/x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^x/x \\ e^x & -e^x/x^2 \end{vmatrix}} = \frac{-e^{2x}}{e^{2x}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{x+1} + x - 1}$ $\cancel{\lambda'(x) = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & xe^x \end{vmatrix} \neq xe^{2x}}$

$\cancel{\lambda'(x) \neq \frac{-x^3}{x+1}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu'(x) + \dfrac{\lambda'(x)}{x} = 0 \\ \mu'(x) + \lambda'(x)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1 \end{cases}$$

$\det() = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \neq 0$

donc $\lambda'(x) = -x^2$, $\mu'(x) = x$

$\iff \lambda(x) = -\frac{x^3}{3} + \lambda(0)$, $\mu(x) = \frac{x^2}{2} + \mu(0)$

on peut fixer $\lambda(0) = \mu(0) = 0$, alors

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{3}\right) e^x = \frac{x^2}{6} e^x \quad \text{est sp.}$$

et on retrouve les résultats.

$\boxed{\text{Ex 4}}$: (E) : $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$ sur $]-1;1[$

chgt de variable : $t = \arcsin(x)$ C^2-difféo $]-1;1[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

$$z(t) = y(x), \quad y(x) = z(\arcsin(x))$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin(x))$$

$$y''(x) = \frac{1}{1-x^2} z''(\arcsin(x)) - \frac{1}{2}\cdot(-2)\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} z'(\arcsin(x))$$

$$\underbrace{(1-x^2)y''(x) - xy' + y}_{} = z''(\arcsin(x)) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin(x)) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin(x)) + z(\arcsin(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \forall t \in]-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}[, \quad z''(t) + z(t) = 0$$

donc $z(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$, $A, B \in \mathbb{R}$

et $y(x) = A\sqrt{1-x^2} + Bx$

$\boxed{\text{Ex 5}}$ (E) : $x^2(x+1)y'' - x(x^2+4x+2)y' + (x^2+4x+2)y = 0$ sur $]0;+\infty[$.

On cherche une sol. p. de la forme $y = \sum a_n x^n$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n$$

$$- \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n+2} - 4\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n+1} - 2\sum_{n\geq 1} n a_n x^n$$

$$+ \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+2} + 4\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} + 2\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 3}\Big((n-1)(n-2)a_{n-1} + n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-2} - 4(n-1)a_{n-1} - 2na_n + a_{n-2} + 4a_{n-1} + 2a_n\Big)x^n$$

$$+ x^2(\cancel{2a_2} - \cancel{4a_1} - \cancel{4a_2} + a_0 + \cancel{4a_1} + \cancel{2a_2}) + x(-\cancel{2a_1} + 4a_0 + \cancel{2a_1}) + 2a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a_0 = 0, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \\ (n(n-1) - 2n + 2)a_n + ((n-1)(n-2) - 4(n-1) + 4)a_{n-1} + (-n+2+1)a_{n-2} = 0 \end{array}\right.$$
$n \geq 3$

$$(n^2 - 3n + 2)a_n + (n^2 - 7n + 10)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2} = 0$$

$$(n-1)(n-2)a_n + (n-2)(n-5)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2} = 0$$

$$b_n = (n-1)!\,a_n \Rightarrow (n-2)b_n + (n-5)b_{n-1} = b_{n-2}$$

$$2a_3 - 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \Rightarrow \forall n \geq 2,\ a_n = 0$$

donc $y(x) = x$ est solution particulière.

On cherche alors ~~y(x) = x z(x)~~ y sous la forme $y(x) = x z(x)$

$$y'(x) = x z'(x) + z(x)$$
$$y''(x) = x z''(x) + 2z'(x)$$

$$x^2(x+1)(xz'' + 2z') - x(x^2+4x+2)(xz'+z) + (x^2+4x+2)xz = 0$$

$\Leftrightarrow x^3(x+1)z'' + (2x^2(x+1) - x^4 - 4x^3 - 2x^2)z' + 0 = 0$

$\Leftrightarrow x^3(x+1)z'' + (-x^4 - 2x^3)z' = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)z'' - (x+2)z' = 0$

$\Leftrightarrow z'' = \frac{x+2}{x+1}z' \Leftrightarrow z'(x) = \lambda(x+1)e^x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$

$= \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)z'$ et donc $z(x) = \lambda x e^x + \mu$

et $S = \{x \mapsto \lambda x^2 e^x + \mu x,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\text{Ex } 6}$ i (E): $x(x^2-1)y'' - 2(x^2-1)y' + 2xy = 0$ sur $]1; +\infty[$

On cherche une solution polynômiale : $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} - 2\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n+1} + 2\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 3}\left((n-1)(n-2)a_{n-1} - n(n+1)a_{n+1} - 2(n-1)a_{n-1} + 2(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1}\right)x^n$$
$$+ x^2(-\cancel{6a_3} - \cancel{2a_1} + \cancel{6a_3} + \cancel{2a_1}) + x(-2a_2 + 4a_2 + 2a_1) + 2a_1 = 0$$

$\Leftrightarrow$ ~~$a_0 = a_1 = a_2 = 0$~~ $a_1 = 0,\ a_1 = -a_2$

$n \geq 3$: $a_{n+1}(n+1)(2-n) + 2a_{n-1} + a_{n-1}(n-1)(n-4) = 0$

~~$a_5(5 \cdot (-2)) + 2a_4 = 0 \Rightarrow$~~

~~$a_4(-4) + 2a_3 + 0 = 0$~~

$y(x) = x^n + \dots + a_0$ est solution

$\Rightarrow$ coeff. dom. : $n(n-1)x^{n+1} - 2n x^{n+1} + 2x^{n+1} = 0$

$\Leftrightarrow n(n-1) - 2n + 2 = 0$

$n^2 - 3n + 2 = 0$

$(n-1)(n-2) = 0$

$y = x^2 + ax + b$ est solution $\Leftrightarrow$

$x(x^2-1)(2) - 2(x^2-1)(2x+a) + 2x(x^2+ax+b) = 0$

$\Leftrightarrow x^2(-2a + 2a) + x(-2 + 4 + 2b) + 2a = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ et $b = -1$

donc $y = x^2 - 1$ est sol.

On cherche alors y sous la forme $y(x) = (x^2-1)z(x)$

$$y'(x) = 2xz(x) + (x^2-1)z'(x)$$
$$y''(x) = 4xz'(x) + 2z(x) + (x^2-1)z''(x)$$

y est sol. de (E) $\Leftrightarrow$

$$\cancel{x^2(x-1)\left(4xz' + (x^2-1)z''\right) - 2(x^2-1)(x^2-1)z' = 0}$$

$$\cancel{4x^3 z' + x^2(x^2-1)z'' - 2(x+1)(x^2-1)z' = 0}$$

$$\cancel{-2(x+1)(x^2-1)+4x^3 = 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2}$$
$$\cancel{= 2(x^2+1)(x-1)}$$

$$\cancel{x^2(x^2-1)z'' + 2(x^2+1)(x-1)z' = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1)z'' + 2(x^2+1)z' = 0}$$

$$x\cancel{(x^2-1)}\left(4xz' + (x^2-1)z''\right) - 2\cancel{(x^2-1)}\left((x^2-1)z'\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-1)z'' + 4x^2z' - 2(x^2-1)z' = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-1)z'' = -2(x^2+1)z' \Leftrightarrow z'' = -\frac{2(x^2+1)}{x(x^2-1)}z'$$
$$= \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1}\right)z'$$

$$\Leftrightarrow z' = \lambda \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{\lambda x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{\lambda}{4}\left(\frac{x}{(x-1)^2} - \frac{x}{(x+1)^2}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{4}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}\right)$$

d'où z puis y...

$\boxed{\text{Ex 7}}$: $I \subset \mathbb{R}$, $p, q : I \to \mathbb{R}$ C^0, u, v sol. de $y'' + py' + qy = 0$

1. $W = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = uv' - u'v$

$$W'(x) = uv'' - u''v$$
$$= -u(pv' + qv) + (pu' + qu)v$$
$$= p(u'v - uv') = -p(x)W(x)$$

donc $W(x) = W(a)\exp\left(\int_a^x -p(t)dt\right)$

2. On suppose que u ne s'annule jamais. Soit $\varphi = \frac{v}{u}$.

$$\varphi' = \frac{v'u - vu'}{u^2} = \frac{W}{u^2}$$

On peut alors obtenir v : $v(x) = u(x)\int_0^x \varphi'(t)\,dt = u(x)\int_0^x \frac{W(t)}{u^2(t)}\,dt$.

$-v(0)$

3. (E) : $x^2y'' - x(2+x)y' + (x+2)y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Sol. polynômiale : $y = x^n + a_{n-1}x^{n-1}\dots$ est sol

$\Rightarrow \quad -n+1 = 0 \Leftrightarrow n=1$

$y = x + a_0$ est solution $\Leftrightarrow -x(2+x) + (x+2)(x+a_0) = 0$

$-2x + 2a_0 + (a_0+2)x = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$

(b) $u(x) = x$ est une solution, et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

$\boxed{\text{Analyse}}$ Si v est une autre solution, alors (sur $\mathbb{R}_+^*$)

$$W(x) = W(1)\exp\left(\int_1^x \frac{t(2+t)}{t^2}\,dt\right) \qquad \frac{t(2+t)}{t^2} = \frac{2}{t} + 1 = (2\ln(t) + t)'$$

$$= W(1)\exp\left(2\ln(x) + x - 1\right)$$

$$= C e^x x^2$$

et ainsi, $$v(x) - v(1) = x\int_1^x \frac{W(t)}{u^2(t)}\,dt = C\int_1^x e^t\,dt$$

$$= Cxe^x - Cx$$

$$v(x) = Cx(e^x - 1) + v(1)$$

$\boxed{\text{Synthèse}}$: $v(x) = xe^x + ax + b$ est solution de (E) $\Leftrightarrow x \longmapsto xe^x + b$ est solution

$\Leftrightarrow x^2(xe^x + 2e^x) - x(2+x)(xe^x + e^x) + (x+2)(xe^x + b) = 0$

$\Leftrightarrow x^3(e^x - e^x) + x^2(2e^x - e^x - 2e^x + e^x) + x(\cancel{2e^x} + b + 2e^x) + 2b = 0$

$\Leftrightarrow b = 0$

On a donc bien deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$: $u(x) = x$, $v(x) = xe^x$

La même étude sur $\mathbb{R}_-^*$ donne : $u(x) = x$, $v(x) = xe^x$

$$W(x) = W(-1)\left(\int_{-1}^x \frac{t(2+t)}{t^2}\,dt\right) = W(-1)\exp(2\ln(x) + x + 1) = Ce^x x^2$$

(c) Solution sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ sol. sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, donc

$$u(x) = \begin{cases} ax + bxe^x, & x < 0 \\ cx + dxe^x, & x > 0 \end{cases}$$

continuité en 0 : $a = c$, $u'(0^+) = u'(0^-) \Leftrightarrow a + b = c + d$

$\Leftrightarrow a = c,\ b = d.$

donc $S = \{x \longmapsto \mu x + \lambda xe^x,\ \mu, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{\text{Ex } 8}$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dér., $f + f'' \geq 0$

mq $f(x) + f(x+\pi) \geq 0$.

$\varphi := f + f'' \geq 0$, et donc ~~[illegible]~~ on applique la méthode de variation des constantes : $\left.\begin{array}{l} y = A\cos + B\sin \\ \text{et } y' = -A\sin + B\cos \end{array}\right|$ est sol

$$\iff \begin{cases} A'\cos + B'\sin = 0 \\ -A'\sin + B'\cos = \varphi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A' = \begin{vmatrix} 0 & \sin \\ \varphi & \cos \end{vmatrix} = -\sin\varphi \\ B' = \cos \cdot \varphi \end{cases}$$

$A(x) = \int_0^x -\varphi(t)\sin(t)\,dt$

$B(x) = \int_0^x \varphi(t)\cos(t)\,dt$

conviennent $\Rightarrow y = \int_0^x \varphi(t)\left(-\cos(x)\sin(t) + \cos(t)\sin(x)\right)dt$

$$= \int_0^x \varphi(t)\sin(x-t)\,dt$$

donc $f(x) = \mu\cos(x) + \lambda\sin(x) + \int_0^x \varphi(t)\sin(x-t)\,dt$ pour certains μ, λ.

alors $f(x+\pi) + f(x) = \int_x^{x+\pi} \varphi(t)\sin(\underbrace{x+\pi-t}_{\in [0;\pi]})\,dt \geq 0$. $\square$.