Feuille d'exercices n° 10

Continuité et dérivabilité

Exercice 1. Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, $x_0 \in]a, b[$ et $f :]a, b[\to \mathbf{R}$. On suppose que f est continue en x_0 et que $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I inclus dans $]a, b[$ et contenant x_0, tel que $\forall x \in I,\ f(x) > 0$.

Exercice 2. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

1. $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$
2. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.
3. $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x\, E\big(\frac{1}{x}\big)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$, où E est la fonction «partie entière».
4. $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice 3.

1. Montrer que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction continue telle que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$
alors f est surjective.
2. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré impair. Montrer que P admet une racine réelle.
3. Donner un exemple de polynôme à coefficients réels, de degré pair, n'admettant pas de racine réelle.

Exercice 4. Montrer qu'il existe $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ tel que
$$\tan(x) + \frac{x}{3} = 0.$$

Exercice 5.

1. Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ une application continue, telle que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$. Montrer que f possède un point fixe.
2. Soit $g : [0, 1] \to [0, 1]$ une application. On suppose que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$ tels que $x \neq y$, on a $|g(x) - g(y)| < |x - y|$. Montrer que g admet un unique point fixe.

Exercice 6.

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.
2. Calculer
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x\left(\sin^8(x)+\cos^{14}(x)\right)}.$$

Exercice 7. Montrer que la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue.

Exercice 8. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues qui vérifient la condition

$$(*) \ : \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = f(x)\,f(y)\,.$$

Soit f vérifiant $(*)$.

1. Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n$, $f(x_1+\cdots+x_n) = f(x_1)\cdots f(x_n)$.
2. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?
3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Que peut-on dire de f ?
   On suppose désormais que f ne s'annule pas.
4. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^\star$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = \alpha^n$.
5. Montrer que : $\forall k \in \mathbf{Z}$, $f(k) = \alpha^k$.
6. Montrer que : $\forall r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = \alpha^r$.
7. Conclure.

Exercice 9. Soit $a \in \mathbf{Z}$. On définit $f : \mathbf{R}^\star \to \mathbf{R},\ x \longmapsto x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. À quelle condition sur a la fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Lorsqu'il existe, à quelle condition ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. Dans ce cas, la dérivée de f est-elle continue en 0 ?

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x + \frac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $[0,1]$, et dérivable sur $]0,1[$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? En 1 ?
3. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tels que $f'(c) = 0$.

Exercice 11. Soient un entier $n \geq 1$ et une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, n fois dérivable, et telle que $f^{(n)}$ est continue. On suppose que f s'annule en $n+1$ points distincts.
Montrer que f' s'annule au moins n fois, puis que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Exercice 12. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $t > 0$

$$\arctan t > \frac{t}{1+t^2}.$$

Exercice 13. À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x\to\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right).$$

Exercice 14. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$.

1. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f'(x) \neq 0$. Montrer que f est de signe constant sur $[0,1]$.
2. On suppose de plus que f' est continue sur $[0,1]$, et que $f'(x) > 0$ pour $x \in [0,1]$. Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que pour $x \in [0,1]$, $f(x) \geq mx$.