$\boxed{\text{TD 11}}$: Polynômes

$\boxed{\text{Ex 1}}$: a) $X^3 - 7X^2 + 14X - 8 = P$

Racine évidente : $1 \Rightarrow (X-1) \mid P$.

$$P = (X-1)(X^2 - 6X + 8) = (X-1)(X-2)(X-4)$$

donc les racines complexes, réelles et rationnelles de P sont 1, 2 et 4.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $P = X^n - 1$

Les racines complexes de P sont les racines n-ièmes de l'unité,

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \ k \in [\![0; n-1]\!]$$

Les racines réelles / rationnelles de P sont : $\begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 \text{ et } -1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

c) $X^6 - 4 = P$. racine évidente : $4^{1/6} = 2^{1/3}$.

$\Rightarrow$ les racines complexes de P sont les éléments de

$$2^{1/3}\,\mathbb{U}_6 = \left\{ 2^{1/3} e^{i\frac{k\pi}{3}}, \ k \in [\![0;5]\!] \right\}$$

les racines réelles sont $2^{1/3}$ et $-2^{1/3}$

P n'admet aucune racine rationnelle car $2^{1/3} \notin \mathbb{Q}$.

d) $X^4 - 13X^2 + 36 = P$

$z \in \mathbb{C}$ est une racine de $P \Leftrightarrow z^2$ est une racine de $X^2 - 13X + 36$

$13^2 - 4 \times 36 = 169 - 144 = 25 = 5^2$

$$\Leftrightarrow z^2 \in \left\{ \frac{13+5}{2}, \frac{13-5}{2} \right\}$$

$$\Leftrightarrow z^2 \in \{9, 4\}$$

$$\Leftrightarrow z \in \{2, -2, 3, -3\}.$$

e) $X^4 + 6X^2 + 25 = P$, $z \in \mathbb{C}$ est une racine de P

$\Leftrightarrow z^2$ est une racine de $X^2 + 6X + 25$, $\quad 6^2 - 4 \times 25 = -64 = (8i)^2$

$$\Leftrightarrow z^2 \in \left\{ \frac{-6+8i}{2}, \frac{-6-8i}{2} \right\} = \{-3+4i, -3-4i\}$$

$$= \{(1+2i)^2, (1-2i)^2\}$$

$$\Leftrightarrow z \in \{1+2i, 1-2i, -1-2i, -1+2i\}$$

$\Rightarrow$ pas de racines réelles (ni rationnelles).

$\boxed{Ex2}$: a) $X+1$: Les diviseurs de $X+1$ sont les multiples des polynômes $X+1$ et 1

b) Les diviseurs unitaires de X^2-1 dans $\mathbb{R}[X]$ sont $X+1, X-1, 1$ et X^2-1

c) ———— X^2+1 —— $\mathbb{C}[X]$ sont $1, X+i, X-i, X^2+1$.

d) ———— X^2+1 —— $\mathbb{R}[X]$ — $1, X^2+1$.

$\boxed{Ex3}$: 1. $P \in \mathbb{R}[X]$: $\exists n \in \mathbb{N}, a_0, \dots a_n \in \mathbb{R}$ tq $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Soit $a \in \mathbb{C}$: $\overline{P(a)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k a^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, \overline{a^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k (\overline{a})^k = P(\overline{a})$

2. $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $P(x) = Q(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Alors $P-Q \in \mathbb{C}[X]$ admet une infinité de racines,

et donc $P-Q=0 \Rightarrow P=Q$.

3. $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Soit $\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k \in \mathbb{C}[X]$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $P(x) \in \mathbb{R}$, donc

$$P(x) = \overline{P(x)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, \overline{x}^k = \overline{P}(x)$$

et donc $P(x) = \overline{P}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. D'après 2., $P = \overline{P}$, d'où $a_k = \overline{a_k}$ $\forall k \in [\![0,$

$\Rightarrow P \in \mathbb{R}[X]$.

$\boxed{Ex4}$ $P = (X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$

$= X^5 + \cancel{X^4} + \cancel{X^3} - \cancel{X^4} - \cancel{X^3} - \cancel{X^2} + \cancel{X^2} + X + 1 = X^5 + X + 1$

$P(10) = 10^5 + 10 + 1 = 100011 = (10^3 - 10^2 + 1)(10^2 + 10 + 1)$

$= 901 \times 111$

et donc $100011 \notin \mathcal{P}$ (par ailleurs, $3 \mid 100011$)

$\boxed{Ex5}$: $P \in \mathbb{R}[X]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$

λ est le reste dans la division euclidienne de P par $X-a$:

μ ———————— $X-b$

$\exists\, Q_a, Q_b \in \mathbb{R}[X]$ tq $P = (X-a)Q_a + \lambda$

$= (X-b)Q_b + \mu$

$\Rightarrow P(a) = \lambda$ et $P(b) = \mu$

Soit (R, Q) le reste et le quotient dans la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.

$d°(R) \leq 1 \Rightarrow \exists (c,d) \in \mathbb{R}^2$ tq $R = cX + d$

~~et~~ $P = (X-a)(X-b)Q + cX + d$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(a) = \lambda = ca + d \\ P(b) = \mu = cb + d \end{cases} \Rightarrow c(a-b) = \lambda - \mu \Rightarrow \boxed{c = \frac{\lambda-\mu}{a-b}}$$

et donc $\lambda = \frac{\lambda-\mu}{a-b} a + d \Rightarrow \boxed{d = \frac{a\mu - \lambda b}{a-b}}$

Si $\lambda = \mu = 0$, $(\Leftarrow)$ ~~alors~~ $R = 0 \Leftrightarrow (X-a)(X-b) \mid P$

ce qui est évident, puisque $\lambda = \mu = 0 \Leftrightarrow P(a) = P(b) = 0$

$\Leftrightarrow$ a et b sont des racines de

$\Leftrightarrow (X-a)(X-b) \mid P$.

$\boxed{\text{Ex } 6}$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} X^k = \sum_{k=1}^{n} X^k - \sum_{k=0}^{n-1} X^k = X^n - 1$$

$$(X+1)\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^{k+1} + \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k$$

$$= \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} X^k + \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k$$

$$= -\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k X^k + \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k = -(-1)^{2n+1} X^{2n+1} + 1$$

$$= X^{2n+1} + 1.$$

1. Supposons que $M_n = 2^n - 1$ est premier. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tq $k \mid n$, ~~et~~ : ~~soit~~ $\exists q \in \mathbb{N}^*$ tq $n = kq$

Alors $M_n = 2^{kq} - 1$

$$= (2^q)^k - 1 = (2^q - 1)\left(\sum_{j=0}^{k-1} (2^q)^j\right)$$

Mais alors $2^q - 1 = 1$ ou M_n, puisque M_n est premier

$\Rightarrow q = 1$ ou n.

Les seuls diviseurs de n sont 1 et $n \Rightarrow n \in \mathcal{P}$.

2. Supposons $F_n = 2^n + 1$ premier, et soit $(k,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tq $n = (2k+1)p$.

Alors $F_n = 2^n + 1 = (2^p)^{2k+1} + 1 = (2^p + 1)\sum_{j=0}^{2k} (-1)^j (2^p)^j$

F_n premier $\Rightarrow 2^p + 1 = 1$ ou F_n

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $p = n \Rightarrow k = 0$.

En particulier, n n'admet aucun diviseur impair différent de 1, et donc n est une puissance de 2.

$\boxed{\text{Ex 7}}$: On commence par remarquer que les racines de X^2+X+1 sont j et $j^2=\bar{j}$, et donc $X^2+X+1=(X-j)(X-\bar{j})$.

On va montrer le résultat suivant : $X^2+X+1 \mid X^{2n}+X^n+1$ dans $\mathbb{R}[X] \iff \underbrace{X^2+X+1}_{P} \mid \underbrace{X^{2n}+X^n+1}_{P_n}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Il est clair que si P divise P_n dans $\mathbb{R}[X]$, alors P divise P_n dans $\mathbb{C}[X]$. Supposons que P divise P_n dans $\mathbb{C}[X]$. Alors, $\exists\, Q \in \mathbb{C}[X]$ tq $P_n = PQ$. Par ailleurs, on note T le quotient et R le reste dans la division euclidienne de P_n par P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P_n = TP + R = QP \implies \text{par unicité de la division}$$

euclidienne dans $\mathbb{C}[X]$, $Q = T \in \mathbb{R}[X]$ et $R=0$, cqfd.

Par conséquent, $P \mid P_n$ dans $\mathbb{R}[X] \iff P \mid P_n$ dans $\mathbb{C}[X] \iff P_n(j) = P_n(j^2) = 0$.

Si $n \equiv 0\,[3]$, alors $P_n(j) = j^{2n}+j^n+1 = (j^n)^2+j^n+1 = 3$

Si $n \equiv 1\,[3]$, alors $P_n(j) = j^{2n}+j^n+1 = j^2+j+1 = 0$

$$P_n(j^2) = j^{4n}+j^2+1 = j^4+j^2+1 = j+j^2+1 = 0$$

Si $n \equiv 2\,[3]$, alors $P_n(j) = j^{2n}+j^n+1 = j^4+j^2+1 = 0$

$$P_n(j^2) = j^{4n}+j^{2n}+1 = j^8+j^4+1 = j^2+j+1 = 0$$

Finalement, $P \mid P_n \iff n \not\equiv 0\,[3]$.

$\boxed{\text{Ex 8}}$: 1. $X^n + X^{n-1} + \dots + 1 = P$

$$(X-1)P = (X-1)\sum_{k=0}^{n} X^k = X^{n+1}-1 \quad \text{(c.f. ex 6)}$$

$$= \prod_{k=0}^{n}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}\right)$$

$$= (X-1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}\right)$$

donc $P = \prod_{k=1}^{n}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}\right)$ est la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

2. $X^{11} + 2^{11} = P$

$P(-2)=0$, donc les racines complexes de P sont

$$-2\mathbb{U}_{11} = \left\{ -2e^{i\frac{2k\pi}{11}}, k \in [\![0;10]\!] \right\}$$

et donc, dans $\mathbb{C}[X]$, P ~~se~~ s'écrit : $P = \prod_{k=0}^{10} \left(X + 2e^{i\frac{2k\pi}{11}}\right)$

Dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les racines complexes avec leur conjuguée, deux à deux :

$$P = (X+2) \prod_{k=1}^{5} \left(\left(X + 2e^{i\frac{2k\pi}{11}}\right)\left(X + 2e^{i\frac{(11-2k)\pi}{11}}\right) \right)$$

$$= (X+2) \prod_{k=1}^{5} \left(\left(X + 2e^{i\frac{2k\pi}{11}}\right)\left(X + 2e^{-i\frac{2k\pi}{11}}\right) \right)$$

$$= (X+2) \prod_{k=1}^{5} \left(X^2 + 2X\left(e^{i\frac{2k\pi}{11}} + e^{-i\frac{2k\pi}{11}}\right) + 4 \right)$$

$$= (X+2) \prod_{k=1}^{5} \underbrace{\left(X^2 + 4X\cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right) + 4 \right)}_{\text{irréductible dans } \mathbb{R}[X].}$$

3. $X^4 + 4$: racine évidente $4^{1/4} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

donc, dans $\mathbb{C}[X]$,

$$X^4 + 4 = \prod_{k=0}^{3} \left(X - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{2k\pi}{4}}\right) = \prod_{k=0}^{3} \left(X - \sqrt{2}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}\right)$$

dans $\mathbb{R}[X]$: $X^4 + 4 = \left(\left(X - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right)\left(\left(X - \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X - \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)\right)$

$$= \left(X^2 - 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 2\right)\left(X^2 - 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 2\right)$$

$$= \left(X^2 - 2X + 2\right)\left(X^2 + 2X + 2\right)$$

idem dans $\mathbb{Q}[X]$.

4. $X^4 - j$: racine évidente : $e^{i\,2\pi/12} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$$\Rightarrow X^4 - j = \prod_{k=0}^{3} \left(X - e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{2k\pi}{4}}\right) = \left(X - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\right)\left(X - \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(X + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\right)\left(X + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

5. $X^8 + X^4 + 1$. On cherche les racines complexes :

$$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$$

donc $X^8 + X^4 + 1 = \prod_{k=0}^{3} \left(X - je^{i\frac{2k\pi}{4}}\right)\left(X - j^2 e^{i\frac{2k\pi}{4}}\right)$

$$= \prod_{k=0}^{3} \left(X - je^{i\frac{k\pi}{2}}\right)\left(X - \bar{j}e^{i\frac{k\pi}{2}}\right)$$

$$X^8 + X^4 + 1 = \prod_{k=0}^{3} \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(j e^{\frac{ik\pi}{2}}\right) + 1\right)$$

$$= \prod_{k=0}^{3} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right) + 1\right)$$

$$= (X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{\ }}{\ }$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right) = +\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. $$X^5 - 1 = \prod_{k=0}^{4} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{5}}\right) = (X-1) \prod_{k=1}^{2} \left(\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{5}}\right)\left(X - e^{-i\frac{2k\pi}{5}}\right)\right)$$

$$= (X-1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1\right)$$

$\boxed{\text{Ex 9}}$: $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$

1. $P(i) = (i^2 - i + 1)^2 + 1 = (-i)^2 + 1 = 0$
2. $P \in \mathbb{R}[X]$ et $P(i) = 0 \Rightarrow \bar{i}$ est racine de P

donc $(X+i)(X-i) = X^2+1 \mid P$

$$P = X^4 - 2X^3 + X^2 + 2X^2 - 2X + 1 + 1$$
$$= X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 2$$
$$= (X^2+1)\underbrace{(X^2 - 2X + 2)}$$

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 2 & X^2+1 \\ -2X^3 + 2X^2 - 2X + 2 & X^2 - 2X + \\ 2X^2 \quad\quad + 2 & \end{array}$$

discriminant $= 4 - 8 < 0$, donc irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Cherchons maintenant les racines complexes :

$$X^2 - 2X + 2 = \left(X - \frac{2+2i}{2}\right)\left(X - \frac{2-2i}{2}\right)$$

$$\Rightarrow P = (X+i)(X-i)(X-1+i)(X-1-i).$$

$\boxed{\text{Ex 10}}$: $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $P = (\cos a + X \sin a)^n \in \mathbb{R}[X]$

On pose Q, R le quotient et le reste dans la division euclidienne de P par (X^2+1) : $P = (X^2+1)Q + R$,

avec $R = bX + c$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Or, $P(i) = (\cos a + i \sin a)^n = (e^{ia})^n = e^{ina} = \cos(na) + i\sin(na)$,

et donc $P(i) = \cancel{(i^2+1)Q(i)} + R(i)$

$\Rightarrow \cos(na) + i\sin(na) = bi + c$

$\Rightarrow \begin{cases} c = \cos(na) \\ b = \sin(na) \end{cases}$

$\Rightarrow P = (X^2+1)Q + \sin(na)X + \cos(na).$

$\boxed{\text{Ex 11}}$: $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$

1. $P(j) = j^8 + 2j^6 + 3j^4 + 2j^2 + 1$

$= j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3(j^2 + j + 1) = 0$

$P'(j) = 8j^7 + 12j^5 + 12j^3 + 4j$

$= 8j + 12j^2 + 12 + 4j = 12(j^2 + j + 1) = 0$

$P''(j) = 56j^6 + 60j^4 + 36j^2 + 4$

$= 56 + 60j + 36j^2 + 4 = 60(j^2 + j + 1) - 24j^2 = -24j^2 \neq 0$

donc j est une racine double de P.

2. $P \in \mathbb{R}[X]$ et j est racine double de $P \Rightarrow \bar{j}$ est racine double de P

P est pair $\Rightarrow -j$ est racine double, idem pour $\bar{j}$.

On a donc 8 racines (~~avec multip~~ comptées avec multiplicité),

d'où $P = (X-j)^2 (X-\bar{j})^2 (X+j)^2 (X+\bar{j})^2$.

Dans $\mathbb{R}[X]$, P s'écrit :

$$P = (X^2 + X + 1)^2 (X^2 + 2\,\mathrm{Re}(j)\, X + 1)^2$$

$$= (X^2 + X + 1)^2 (X^2 - X + 1)^2.$$

$\boxed{\text{Ex 12}}$: $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + aX^2 + 4X + 1$

1. -1 est une racine de $P \Leftrightarrow a = 8$.

2.

$$\begin{array}{r|l}
X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + 8X^2 + 4X + 1 & (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1 \\
\cline{2-2}
2X^5 + 7X^4 + 10X^3 + 8X^2 + 4X + 1 & X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 \\
3X^4 + 8X^3 + 8X^2 + 4X + 1 & \\
2X^3 + 5X^2 + 4X + 1 & \\
X^2 + 2X + 1 & \\
0 &
\end{array}$$

donc $P = (X+1)^2 Q$, avec $Q = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$

et $Q(-1) = 1 - 2 + 3 - 2 + 1 = 1 \neq 0$

donc -1 est racine double de P.

3. j est racine de $P \Leftrightarrow j$ est racine de Q.

$Q(j) = j^4 + 2j^3 + 3j^2 + 2j + 1 = j + 2 + 3j^2 + 2j + 1$

$= 3(j^2 + j + 1) = 0$

$Q'(j) = 4j^3 + 6j^2 + 6j + 2 = 6(j^2 + j + 1) = 0$

Ainsi, j est racine d'ordre $\geqslant 2$ de Q et donc de P.

4. j racine d'ordre $\geqslant 2$ de $P \Rightarrow \bar{j}$ racine d'ordre $\geqslant 2$ de P car $P \in \mathbb{R}[X]$

On en déduit que j et $\bar{j}$ sont des racines doubles, puisque le degré de P est égal au nombre de racines comptées avec multiplicité.

Alors $P = (X+1)^2(X-j)^2(X-\bar{j})^2$.

dans $\mathbb{R}[X]$, $P = (X+1)^2(X^2+X+1)^2$.

$\boxed{\text{Ex } 13}$: $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

Dans $\mathbb{C}[X]$, $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$ divise $X^n \sin(\theta) - X\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$

$\Leftrightarrow$ les racines du premier sont des racines du second

Or, les racines de $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$ sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, et donc

$$e^{in\theta}\sin(\theta) - e^{i\theta}\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$$
$$= (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))\sin(\theta) - (\cos(\theta) + i\sin(\theta))\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$$
$$= \cos(n\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\sin(n\theta) + \sin(n\theta - \theta) = 0$$

$P = X^n\sin(\theta) - X\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta) \in \mathbb{R}[X]$, donc $e^{-i\theta}$ est aussi une racine.

Ainsi, $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont des racines de P, et donc $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$ divise P. dans $\mathbb{C}[X]$.

De plus, on a vu (ex 7) que cela est équivalent à : $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$ divise P dans $\mathbb{R}[X]$, puisque ce sont des polynômes réels, d'où la divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{\text{Ex } 14}$: 1. On cherche le PGCD de $X^6 - X^5 + X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 3X + 1$ et $2X^4 + X^2 + X + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
X^6 - X^5 + X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 3X + 1 & 2X^4 + X^2 + X + 1 \\
\hline
-X^5 + \frac{1}{2}X^4 - \frac{5}{2}X^3 + \frac{5}{2}X^2 - 3X + 1 & \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{4} \\
\frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + 3X^2 - \frac{5}{2}X + 1 & \\
-2X^3 + \frac{11}{4}X^2 - \frac{11}{4}X + \frac{3}{4} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
2X^4 + X^2 + X + 1 & -2X^3 + \frac{11}{4}X^2 - \frac{11}{4}X + \frac{3}{4} \\
\hline
-\frac{11}{4}X^3 - \frac{7}{4}X^2 + \frac{7}{4}X + 1 & -X
\end{array}$$

etc. (calculs longs et pénibles)

Suggestion de polynômes pour la question 1 :

$$P = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 10X + 12$$
$$Q = X^4 + X^2 - 2$$

$$\Rightarrow \mathrm{PGCD}(P,Q) = X^2 + 2.$$

2. $P = X^4 - 1$
   $Q = X^3 + 2X^2 - X - 1$

R	$=$	$= U \times P$	$+ V \times Q$
$X^4 - 1$	$= (X^3+2X^2-X-1)(X-2) + (5X^2-X-3)$	1	0
X^3+2X^2-X-1	$= (5X^2-X-3)\left(\frac{1}{5}X + \frac{11}{25}\right) + \frac{1}{25}(X+8)$	0	1
$5X^2 - X - 3$	$= (X+8)(5X-41) + 325$		
	$= (X^4-1) - (X^3+2X^2-X-1)(X-2)$	1	$-X+2$
$X+8$	$= 25(X^3+2X^2-X-1) - (5X+11)(5X^2-X-3)$	$-5X-11$	$25+(X-2)(5X+11)$
325	$= (5X^2-X-3) - (X+8)(5X-41)$	$1+(5X+11)(5X-41)$	$-X+2+(-5X+41) \times (25+(X-2)(5X$
		$= 25(X^2-6X-18)$	$25(-X^3+8X^2+X+5)$

et donc $325 = 25(X^2-6X-18)P + 25(-X^3+8X^2+X+5)Q$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{13}(X^2-6X-18)P + \frac{1}{13}(-X^3+8X^2+X+5)Q.$$

3. $A = X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$
   $B = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$

On cherche le PGCD en même temps qu'une relation de Bézout :

R	$=$	$= U \times A$	$+ V \times B$
$X^5-X^4+2X^3+1$	$= (X^5+X^4+2X^2-1) - 2(X^4-X^3+X^2-1)$	1	0
$X^5+X^4+2X^2-1$	$= (X^4-X^3+X^2-1)(X+2) + X^3+X+1$	0	1
$X^4-X^3+X^2-1$	$= (X^3+X+1)(X-1) + 0$		
	$= -\frac{1}{2}(X^5-X^4+2X^3+1) + \frac{1}{2}(X^5+X^4+2X^2-1)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
X^3+X+1	$= (X^5+X^4+2X^2-1) - (X+2)(X^4-X^3+X^2-1)$	$\frac{X+2}{2}$	$1 - \frac{(X+2)}{2}$

et donc $\mathrm{PGCD}(A,B) = X^3 + X + 1 = \left(\frac{X+2}{2}\right)A - \frac{X}{2}B$

On se ramène à des polynômes premiers entre eux :

$$A = (X^3+X+1)\underbrace{(X^2-X+1)}_{A'} \quad , \quad B = (X^3+X+1)\underbrace{(X^2+X-1)}_{B'}$$

$\mathrm{PGCD}(A',B') = 1$, et $AU + BV = (X^3+X+1) \Leftrightarrow A'U + B'V = 1$

On a déjà une solution : $U_0 = \frac{X}{2}+1$ et $V_0 = -\frac{X}{2}$

et donc $\quad AU + BV = PGCD(A,B)$

$$\iff A'U + B'V = A'U_0 + B'V_0$$

$$\iff A'(U-U_0) = B'(V_0 - V)$$

$$\iff \exists K \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \begin{cases} V_0 - V = KA' \\ U - U_0 = KB' \end{cases}$$ (d'après le théorème de Gauss)

et ainsi, $\{(U,V) \in (\mathbb{R}[X])^2 \text{ tq } AU + BV = PGCD(A,B)\}$

$$= \left\{ \left(K(X^2+X-1) + \frac{X}{2} + 1,\ -K(X^2-X+1) - \frac{X}{2}\right),\ K \in \mathbb{R}[X] \right\}$$

4. $A = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 1$

$B = X^3 - X^2 + 2X - 1$

	$U \cdot A$	$+\ V \cdot B$
$X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 1 = (X^3 - X^2 + 2X - 1)X + (-X+1)$	1	0
$X^3 - X^2 + 2X - 1 = (X-1)(X^2+2) + 1$	0	1
$X - 1 = -(X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 1) + X(X^3 - X^2 + 2X - 1)$	-1	X
$1 = (X^3 - X^2 + 2X - 1) - (X^2+2)(X-1)$	X^2+2	$-X(X^2+2)+1$

donc A et B sont premiers entre eux et

$$(X^2+2)A + (1 - X^3 - 2X)B = 1$$

et donc, grâce au théorème de Gauss, on conclut que

$(U,V) \in (\mathbb{R}[X])^2$ vérifie $UA + VB = 1$

$$\iff \exists K \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \begin{cases} U = KB + X^2 + 2 \\ V = -KA + 1 - 2X - X^3 \end{cases}.$$

$\boxed{\text{Ex 15}}$ Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $n > m$.

Commençons par remarquer que si $k | n$, alors $X^k - 1 | X^n - 1$:

en effet, si $n = kq$, $k, q \in \mathbb{N}^*$,

$$X^n - 1 = (X^k)^q - 1 = (X^k - 1)\left(\sum_{j=0}^{q-1} (X^k)^j\right) \quad \text{(c.f. ex6)}$$

Notons alors q, r le quotient et le reste dans la div. euclidienne de n par m : $\quad n = mq + r$, $\quad r \in [\![0; m-1]\!]$, $q \geq 1$.

Alors $\quad X^n - 1 = X^{mq} \cdot X^r - 1 = X^r(X^{mq} - 1) + X^r - 1$

Or, $X^m - 1 \mid X^{mq} - 1$, et $d^\circ(X^r-1) < d^\circ(X^m-1)$,
donc $X^r - 1$ est le reste dans la div. euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$, et alors

$$PGCD(X^n-1, X^m-1) = PGCD(X^m-1, X^r-1)$$

On note alors $r_0 = n$, $r_1 = m$, $r_2 = r$, ... ~~tels~~ $r_h = pgcd(m,n)$, $r_{h+1} = 0$ les restes successifs dans l'algorithme d'Euclide pour m et n.

Alors
$$\begin{aligned} PGCD(X^n-1, X^m-1) &= PGCD(X^m-1, X^r-1) \\ &= PGCD(X^{r_1}-1, X^{r_2}-1) \\ &= \dots\ PGCD(X^{r_h}-1, X^{r_{h+1}}-1) = X^{pgcd(m,n)} - 1. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ex } 16}$ $X^2 + 1 = (X+i)(X-i)$ divise $P \in \mathbb{R}[X]$

$\Leftrightarrow$ ~~donc~~ i et $-i$ sont des racines de P

$\Leftrightarrow$ $P(i) = P(-i) = 0$.

Alors $X^2 + 1$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - i - \lambda + \mu i + 2 = 0 \\ 1 + i - \lambda - \mu i + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2\lambda + 4 = 0 \\ -2i + 2\mu i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ex } 17}$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De la même manière que dans l'ex 8,

$$X^n - 1 = \prod_{h=0}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{2h\pi}{n}}\right) = \prod_{h=0}^{n-1} \left(X - e^{-i\frac{2h\pi}{n}}\right)$$

(z racine de $P \in \mathbb{R}[X] \Leftrightarrow \bar{z}$ racine de P)

$$\begin{aligned} \text{et donc } (X^n - 1)^2 &= \left(\prod_{h=0}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{2h\pi}{n}}\right)\right)\left(\prod_{h=0}^{n-1} \left(X - e^{-i\frac{2h\pi}{n}}\right)\right) \\ &= \prod_{h=0}^{n-1} \left[\left(X - e^{i\frac{2h\pi}{n}}\right)\left(X - e^{-i\frac{2h\pi}{n}}\right)\right] \\ &= \prod_{h=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right) + 1\right) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ex } 18}$: $n \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \dots z_n \in \mathbb{C}$

$$e_0 = 1$$

$h \in [\![1;n]\!]$, $e_h = \sum_{1 \le j_1 < \dots} z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_h}$

1. On suppose que $n=2$, $e_1 = \sum_{1 \leq j_1 \leq 2} z_{j_1} = z_1 + z_2$

$$e_2 = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq 2} z_{j_1} z_{j_2} = z_1 z_2$$

et donc $(X-z_1)(X-z_2) = X^2 - (z_1+z_2)X + z_1 z_2 = X^2 - e_1 \cancel{X} + e_2$

Supposons maintenant que $n=3$.

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= z_1 + z_2 + z_3 \\ e_2 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 \\ e_3 &= z_1 z_2 z_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &(X-z_1)(X-z_2)(X-z_3) \\ &= X^3 - (z_1+z_2+z_3)X^2 + (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)X - z_1 z_2 z_3 \\ &= X^3 - e_1 X^2 + e_2 X - e_3 \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On démontre le résultat par récurrence : supposons que $n \geq 2$ et que

$$\prod_{j=1}^{n-1} (X - z_j) = \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^k e'_h X^{n-1-h}$$

avec $e'_h = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_h \leq n-1} z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_h}$ pour $h \in [\![1 ; n-1]\!]$, $e'_0 = 1$.

Alors
$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n} (X - z_j) &= (X - z_n)\left(\sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h e'_h X^{n-1-h}\right) \\
&= \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h e'_k X^{n-h} - z_n \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h e'_h X^{n-1-h} \\
&= \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h e'_h X^{n-k} + \sum_{h=1}^{n} (-1)^h z_n e'_{h-1} X^{n-h} \\
&= \sum_{h=0}^{n} (-1)^h d_h X^{n-h}\end{aligned}$$

avec
$$d_0 = e'_0 = 1$$
$$d_n = z_n e'_{n-1} = \prod_{h=1}^{n} z_h = e_n$$

et $\forall h \in [\![1 ; n-1]\!]$, $d_h = e'_h + z_n e'_{h-1}$

$$= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_h \leq n-1} z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_h} + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \dots < j_{h-1} \leq n-1} z_{j_1} \dots z_{j_{h-1}} z_n$$

$$= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_h \leq n} z_{j_1} \dots z_{j_h} = e_k$$

d'où $\prod_{k=0}^{n}(X-z_j) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k X^{n-k}$,

et on a montré l'hérédité, donc par récurrence, la propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. $2i$ et $3-i$ sont racines de $X^3+(i+1)X^2-(8+4i)X-4+28i = P$

P est de degré 3, donc admet 3 racines complexes (comptées avec multiplicité). Soit donc z_3 la 3e racine de P, $z_1 = 2i$, $z_2 = 3-i$

On sait que $P = \prod_{k=1}^{3}(X-z_i) = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k e_k X^{n-k}$

Le coefficient constant est $(-1)^3 e_3 = -z_1z_2z_3 = -4+28i$

Or, $z_1z_2 = 2i(3-i) = 2+6i$

$$\Rightarrow Z_3 = \frac{-4+28i}{2+6i} = \frac{(-4+28i)(2-6i)}{4+36} = \frac{-8+168}{40} + i\,\frac{56+24}{40}$$

$$Z_3 = 4+2i.$$

4. Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, les $e^{i\frac{2\pi j}{n}}$, $j \in [\![1;n]\!]$ sont exactement les racines du polynôme X^n-1. Par conséquent, leur somme est

$$\sum_{j=1}^{n} e^{i\frac{2\pi j}{n}} = e_1 = - \text{coefficient devant le monôme de degré } n-1$$

$$= 0$$

et de la même manière, la somme des doubles-produits :

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} e^{i2\pi\frac{(j+k)}{n}} = \sum_{1\leq j<k\leq n} e^{i\frac{2\pi j}{n}} e^{i\frac{2\pi k}{n}} = e_2$$

$$= \text{coeff. devant monôme de degré } n-2$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n\geq 3 \\ -1 & \text{si } n=2. \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ex 19}}$: $P = X^4+12X-5$.

D'après l'énoncé, P admet exactement 2 racines réelles, α et β, tq $\alpha+\beta=-2$, et deux racines complexes, z et $\bar{z}$ ($P \in \mathbb{R}[X]$).
avec $\mathrm{Im}(z)>0$

Alors $P = (X-\alpha)(X-\beta)(X-z)(X-\bar{z})$

$$= X^4 - (\alpha+\beta+z+\bar{z})X^3 + (\alpha\beta+\alpha z+\alpha\bar{z}+\beta z+\beta\bar{z}+z\bar{z})X^2 + (\alpha\beta z+\alpha\beta\bar{z}+\alpha z\bar{z}+\beta z\bar{z})X + \alpha\beta z\bar{z}$$

et donc $\begin{cases} 0 = \alpha+\beta+z+\bar{z} = -2+2\mathrm{Re}(z) \\ 0 = \alpha\beta + (\alpha+\beta)(z+\bar{z}) + |z|^2 = \alpha\beta - 4\mathrm{Re}(z) + |z|^2 \\ -12 = \alpha\beta(z+\bar{z}) + (\alpha+\beta)|z|^2 = 2\mathrm{Re}(z+\bar{z})\beta - 2|z|^2 \\ -5 = \alpha\beta|z|^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = 1 \\ \alpha\beta + |z|^2 = 4 \\ -\alpha\beta + |z|^2 = 6 \\ \alpha\beta\,|z|^2 = -5 \end{cases} \Rightarrow$ $2|z|^2 = 10 \Rightarrow |z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 5$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(z)^2 = 4 \Rightarrow z = 1+2i$

$\bar{z} = 1-2i$

et d'autre part, $\alpha\beta = -1$

$\alpha+\beta = -2$

α et β sont racines de $(X-\alpha)(X-\beta) = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta$

$= X^2 + 2X - 1$

$\Rightarrow \alpha, \beta \in \left\{-1 + \frac{\sqrt{8}}{2} ; -1 - \frac{\sqrt{8}}{2}\right\}$

Finalement, sur $\mathbb{C}[X]$,

$$P = (X+1-\sqrt{2})(X+1+\sqrt{2})(X-1-2i)(X-1+2i)$$

et donc sur $\mathbb{R}[X]$,

$$P = (X+1-\sqrt{2})(X+1+\sqrt{2})(X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2)$$
$$= (X+1-\sqrt{2})(X+1+\sqrt{2})(X^2-2X+5).$$

$\boxed{\text{Ex 20}}$: $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que $P' \mid P$, et aussi que $P \neq 0$.

Si $d°(P) = 0$, alors $P' = 0$ et donc $P' \nmid P$, ce qui est exclu.
Par conséquent, $d°(P) \geq 1$.
Alors $\exists Q \in \mathbb{C}[X]$ tq $P = P'Q$.
Or, $d°(P) = d°(P') + d°(Q) \Rightarrow d°(Q) = 1$. Il existe $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, tq
$Q = aX + b$.

Soit α une racine de P. Comme $P = P'Q$, la multiplicité de α pour le polynôme P est égale à la multiplicité de α pour P'
+ la ——— Q.

Or, par définition de la multiplicité d'une racine, la multiplicité de α pour P' = (la mult. de α pour P) -1,
et donc α est nécessairement une racine de Q. Or, Q a une unique racine, donc P a, lui aussi, une unique racine.
Réciproquement, si $\exists u \in \mathbb{C}^*, \alpha \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*$ tq $P = u(X-\alpha)^n$

$\Rightarrow P' = un(X-\alpha)^{n-1} \mid P$.

Conclusion : $P' | P \iff \exists\, u \in \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tq
$$P = u(X-\alpha)^n.$$

$\boxed{\text{Ex } 21}$: 1. $X^2 - X + 1 = (X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $X^2 - X + 1 \,|\, (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$

$\iff e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ sont des racines de $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$

Or, $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$
$$= e^{i\frac{\pi}{6}}\left(2i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{1}{2}}\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

(et de même, $e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$)

alors $\left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right)^{n+2} + \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2n+1} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{n+2} + \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2n+1}$
$$= \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2n+4} + \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2n+1}$$
$$= \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2n+1}\left(e^{i\pi} + 1\right) = 0$$

Comme $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1} \in \mathbb{R}[X]$, $e^{i\frac{\pi}{3}}$ racine $\Rightarrow e^{-i\frac{\pi}{3}}$ racine,

d'où $X^2 - X + 1 \,|\, (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

$\boxed{\text{Ex } 22}$: $P = X^3 + 3X^2 + 2X + i$

1. $P' = 3X^2 + 6X + 2$ admet pour racines $x_1 = \frac{-6+\sqrt{12}}{3}$ et $x_2 = \frac{-6-\sqrt{12}}{3}$

$x_1 = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ et $x_2 = -2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $P(x) = \underbrace{x^3 + 3x^2 + 2x}_{\in \mathbb{R}} + i \Rightarrow \operatorname{Im}(P(x)) = 1 \neq 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \neq 0$

3. D'après la question précédente, P n'admet aucune racine ~~complexe~~ réelle, donc admet 3 racines ~~réelles~~ $\in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ~~complexes~~ (comptées avec multiplicité).

Par ailleurs, si P admet une racine d'ordre ≥ 2, alors c'est aussi une racine de P'. Or, les racines de P' sont réelles

$\Rightarrow$ les racines de P sont simples.

On les note α, β, γ

4. $P = X^3+3X^2+2X+j$

$= (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = -3 \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = 2 \\ \alpha\beta\gamma = -j \end{cases}$$

$*$ $\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$

$= 9 - 2\times 2 = 5$

$*$ $(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta\gamma^2+\beta^2\gamma)+6\alpha\beta\gamma$

$\Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = (\alpha+\beta+\gamma)^3 - 3(\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)+\beta\gamma(\beta+\gamma)) - 6\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha+\beta+\gamma)^3 - 3(\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\gamma(\alpha+\gamma+\beta)+\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)) + 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha+\beta+\gamma)^3 - 3(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)+3\alpha\beta\gamma$

$= -27 - 3\times 2\times(-3) + 3\times(-j)$

$= -9 - 3j$.

$\boxed{\text{Ex 23}}$: $P = X^5-29X^4+117X^3-11X^2+4X+1$

$P(0) = 1 \neq 0$, donc les racines de P sont $\neq 0$. On les note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5. Si $k \in [\![1;5]\!]$,

$0 = \alpha_k^5 - 29\alpha_k^4 + 117\alpha_k^3 - 11\alpha_k^2 + 4\alpha_k + 1$

$\Rightarrow 0 = 1 - 29\frac{1}{\alpha_k} + 117\frac{1}{\alpha_k^2} - 11\frac{1}{\alpha_k^3} + 4\cdot\frac{1}{\alpha_k^4} + \frac{1}{\alpha_k^5}$

Par conséquent, $\alpha_1, \alpha_2 — \alpha_5$ sont des racines de

$Q = X^5+4X^4-11X^3+117X^2-29X+1$

Comme $d°(Q) = 5$, c'est le polynôme unitaire dont les α_k sont les uniques racines.

$\boxed{\text{Ex 24}}$ 1. On peut effectuer l'algorithme d'Euclide, ou alors remarquer que $(X-1)(X^5+X^4+ — +1) = X^6-1$ et d'après l'exercice 15, $PGCD(X^6-1, X^4-1) = X^{pgcd(6,4)}-1$

$= X^2-1$

$= (X-1)(X+1)$

Comme de plus $X-1 \nmid X^5+X^4+ — +1$, on en déduit que $PGCD(X^5+ — +X+1, X^4-1) = X+1$.

$\boxed{\text{Ex } 25}$: Remarquons d'abord que si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors le reste dans la division euclidienne de P par $X-\alpha$ est égal à $P(\alpha)$.

Ainsi, $P \in \mathbb{C}[X]$ admet le même reste dans la division euclidienne par $X-2$, $X-3$ et $X-4$ $\iff P(2)=P(3)=P(4)$.

$\iff \exists\, u \in \mathbb{C}^*, \lambda \in \mathbb{C}, Q \in \mathbb{C}[X]$ tq

$$P = u(X-2)(X-3)(X-4)Q + \lambda$$

Par conséquent, P est un polynôme de degré 3 divisible par $X-1$ et qui a le même reste dans la division euclidienne par $X-2, X-3, X-4$

$\iff \exists (u,\lambda) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tq $P = u(X-2)(X-3)(X-4) + \lambda$

et $P(1) = u(-1)(-2)(-3) + \lambda = 0$

$\iff \exists\, u \in \mathbb{C}^*$ tq $P = u\big((X-2)(X-3)(X-4) + 6\big)$.

$\boxed{\text{Ex } 26}$: $n \in \mathbb{N}^*$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, $P = aX^{n+1} + bX^n + c$

1 est racine multiple de $P \iff P(1) = P'(1) = 0$

$$\iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ (n+1)a + nb = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-nc=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=nc \\ b=-(n+1)c \end{cases}$$

donc 1 est racine multiple de $P \iff P = c\left(nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1\right)$

Calculons alors $P''(1) = c\left(n^2(n+1) - (n+1)n(n-1)\right)$

$= cn(n+1)\left(n-(n-1)\right) = cn(n+1) = 0 \iff c=0$

donc 1 est une racine double de P ssi $P \neq 0$.

$\boxed{\text{Ex } 27}$: $P = X^6 + X^3 + 1$. On commence par chercher les racines complexes de P : $P(z) = 0 \iff (z^3)^2 + z^3 + 1 = 0$

$\iff z^3 \in \{j, j^2\}$

$\iff z \in e^{i\frac{2\pi}{9}}\mathbb{U}_3 \cup e^{i\frac{4\pi}{9}}\mathbb{U}_3$

donc $P(X) = \prod_{k=0}^{2} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{3}} e^{i\frac{2\pi}{9}}\right)\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{3}} e^{i\frac{4\pi}{9}}\right)$

$= \prod_{k=0}^{2} \left(X - e^{i\frac{(6k+2)\pi}{9}}\right)\left(X - e^{i\frac{(6k+4)\pi}{9}}\right)$

$$P = \left(X-e^{i\frac{2\pi}{9}}\right)\left(X-e^{i\frac{16\pi}{9}}\right)\left(X-e^{i\frac{4\pi}{9}}\right)\left(X-e^{i\frac{14\pi}{9}}\right)\left(X-e^{i\frac{8\pi}{9}}\right)\left(X-e^{i\frac{10\pi}{9}}\right)$$

$$= \underbrace{\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)X+1\right)}_{\text{irréductibles sur } \mathbb{R}[X].}$$

$\boxed{\text{Ex 28}}$:

* $P = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \cdots \frac{X^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$P' = 1 + X + \cdots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$ et donc $P = P' + \frac{X^n}{n!}$

Ainsi, $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine multiple de $P \Leftrightarrow P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$,

et $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^n}{n!} = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow P(\alpha) \neq 0$.

Par conséquent, P n'admet que des racines simples.

* $P = 1 + X + X^n$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$:

$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\alpha+\alpha^n = 0 \\ 1 + n\alpha^{n-1} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow (1+\alpha+\alpha^n) - \frac{1}{n}(\alpha + n\alpha^n) = 0$

$\Rightarrow 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\alpha = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{n-1}{n}\right)\alpha = -1$

$\Rightarrow n \neq 1$ et $\alpha = \frac{n}{1-n}$

Or, $1 + n\left(\frac{n}{1-n}\right)^{n-1} \neq 0$, car $\left|n\left(\frac{n}{1-n}\right)^{n-1}\right|$

$= \left|\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\right| \geq n > 1$.

donc α n'est pas une racine de P'.

Finalement, on en déduit que P n'admet que des racines simples.

$\boxed{\text{Ex 29}}$: $P = X^{163} - 24X^{57} - 6$

$d^\circ(P) = 163$ est impair, et donc $\tilde{P} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tilde{P}(x) \end{array}$ est surjective, et

en particulier, P admet une racine réelle.

Supposons que P admette une racine rationnelle : $\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$

tq $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$ et $\left(\frac{p}{q}\right)^{163} - 24\left(\frac{p}{q}\right)^{57} - 6 = 0$

$$\Rightarrow p^{163} - 24p^{57}q^{106} - 6q^{163} = 0$$

$\Rightarrow p\left(p^{162} - 24p^{56}q^{106}\right) = 6q^{163}$

Or, $\text{pgcd}(p,q) = 1 \Rightarrow \text{pgcd}(p, q^{163}) = 1$

~~donc~~ $p \mid 6q^{163} \Rightarrow p \mid 6$

de la même manière, $q\left(6q^{162} + 24p^{57}q^{105}\right) = p^{163}$

$\Rightarrow q \mid 1 \Rightarrow q = 1.$

$\Rightarrow \frac{p}{q} \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$

Or, $P(1) = 1 - 24 - 6 = -29 \neq 0$

$P(2) = 2^{163} - 24 \cdot 2^{57} - 6$

$\geqslant 2^{163} - 2^5 \cdot 2^{57} - 6 = 2^{59}(\underbrace{2^{104} - 1}_{>1}) - 6 > 0$

idem pour $P(3)$, $P(6) > 0$

idem pour $P(-2)$, $P(-3)$, $P(-6) < 0$, et $P(-1) = 17 \neq 0$.

<u>Conclusion</u> : P n'admet pas de racine rationnelle

$\boxed{\text{Ex } 30}$: c.f $\boxed{36}$ à la fin

$\boxed{\text{Ex } 31}$: $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{Z}^4$

1. $(p_1^2 + p_2^2) = |p_1 + ip_2|^2 = (p_1 + ip_2)(p_1 - ip_2)$

$\Rightarrow (p_1^2 + p_2^2)(p_3^2 + p_4^2) = (p_1 + ip_2)(p_3 + ip_4)\overline{(p_1 + ip_2)(p_3 + ip_4)}$

$= |p_1p_3 - p_2p_4 + i(p_1p_4 + p_2p_3)|^2$

$= (\underbrace{p_1p_3 - p_2p_4}_{q_1})^2 + (\underbrace{p_1p_4 + p_2p_3}_{q_2})^2$

2. Soit $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}[X]$. Un calcul direct montre qu'en posant

$\begin{cases} Q_1 = P_1P_3 - P_2P_4 \\ Q_2 = P_1P_4 + P_2P_3 \end{cases}$, on retrouve $(P_1^2 + P_2^2)(P_3^2 + P_4^2) = Q_1^2 + Q_2^2$.

3. <u>(b) ⇒ (a)</u> : On suppose qu'il existe $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tq

$P = Q_1^2 + Q_2^2$

alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = Q_1^2(x) + Q_2^2(x) \geqslant 0$.

(a) ⇒ (b)

Réciproquement, on suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$. Alors les ~~po~~ polynômes apparaissant dans la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sont de la forme

$$X + \cancel{2b}X + c^2,\ \text{avec}\ b^2 - c^2 \leqslant 0$$

Or, $X + 2bX + c^2 = (X+b)^2 + \left(\sqrt{c^2-b^2}\right)^2$, et donc, grâce à une récurrence dont on a montré l'hérédité dans 1., on en déduit que P s'écrit comme la somme de deux carrés de polynômes réels.

$\boxed{\text{Ex } 32}$: c.f $\boxed{38}$ à la fin

$\boxed{\text{Ex } 33}$: c.f $\boxed{40}$ à la fin

$\boxed{\text{Ex } 34}$: ~~Pdh~~ $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_{n+2} = 2X P_{n+1} - P_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

1. $P_2 = 2XP_1 - P_0 = 2X^2 - 1$

$P_3 = 2XP_2 - P_1 = 2X(2X^2-1) - X$
$= 4X^3 - 3X$

$P_4 = 2XP_3 - P_2 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1)$
$= 8X^4 - 8X^2 + 1$

2. On montre par récurrence que le terme de plus degré de P_n est $2^{n-1}X^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

C'est vrai pour $n \in \{1,2,3,4\}$. Supposons que c'est vrai pour ~~...~~ $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $n \geqslant 2$. Alors

$$P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}, \quad \text{et}\ d^\circ(XP_n) = n+1,\ d^\circ(P_{n-1}) = n-1$$

⇒ le terme de plus haut degré de P_{n+1} est $2X$ fois celui de P_n $= 2X\,2^{n-1}X^n$
$= 2^n X^{n+1}$, cqfd

3. On montre par récurrence : P_n a la même parité que n. C'est vrai pour $n \in [\![0;4]\!]$. Supposons que c'est vrai $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $n \geqslant 1$.

Alors, si n est pair, $P_{n+1}(-X) = 2(-X)P_n(-X) - P_{n-1}(X)$
$= -2XP_n(X) + P_{n-1}(X) = -P_{n+1}(X)$

et inversement, si n est impair, $P_{n+1}(-X) = P_{n+1}(X)$.

Donc la propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. Par récurrence : c'est vrai pour $n=0$, $n=1$.

Supposons que c'est vrai : $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $n \geq 1$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall k \in [\![0;n]\!],\quad P_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$$

alors
$$\begin{aligned} P_{n+1}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta) P_n(\cos(\theta)) - P_{n-1}(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ &= 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \\ &= \cos(\theta)\cos(n\theta) - \sin(\theta)\sin(n\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Ex 35}}$: $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé à racines simples. de degré ≥ 2.

1. On utilise le théorème de Rolle. Soient $a_1 < a_2 \dots < a_n$, $n = d°(P)$, les racines de P. Alors il existe $b_1 \in]a_1, a_2[$, $b_2 \in]a_2, a_3[\dots$ $b_{n-1} \in]a_{n-1}, a_n[$ tq $P'(b_k) = 0$ $\forall k \in [\![1;n-1]\!]$. Mais alors, on a trouvé $n-1$ racines distinctes à P', polynôme de degré $n-1$. Ainsi, P' est scindé à racines simples.
2. On a immédiatement : $b_1 > a_1$ et $b_{n-1} < a_n$.

$\boxed{\text{Ex 36}}$: 1. Si $P|Q$ dans $\mathbb{Q}[X]$, alors $P|Q$ dans $\mathbb{C}[X]$. Réciproquement, supposons que $P|Q$ dans $\mathbb{C}[X]$, et soit $Q = SP + R$ la division euclidienne de Q par P dans $\mathbb{Q}[X]$. $Q = TP$, $T \in \mathbb{C}[X]$

$$\Rightarrow (S-T)P + R = 0$$
$$\Rightarrow S = T \text{ et } R = 0 \text{ puisque } d°(R) < d°(P)$$

et donc $T \in \mathbb{Q}[X]$ et $P|Q$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

2. La question précédente montre que la division euclidienne est la même si l'on considère les polynômes comme dans $\mathbb{Q}[X]$ ou dans $\mathbb{C}[X]$, et donc l'algorithme d'Euclide aboutit au même résultat. Ainsi, le pgcd est indépendant du corps.

3. Supposons que $P \in \mathbb{Q}[X]$ est irréductible. Alors

$$\{Q \in \mathbb{Q}[X],\ Q \text{ unitaire},\ Q|P\} = \{1, P\}$$

et donc $\{Q \in \mathbb{Q}[X],\ Q \text{ unitaire},\ Q|P \text{ et } Q|P'\} = \{1\}$ car $d°(P') < d°(P)$

et finalement, le pgcd de P et P' est 1 dans $\mathbb{Q}[X]$, donc ils sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$ aussi.

$\boxed{36}$: Si $P = X^4 + 2a X^3 + b X^2 + 2X + 1$

est le carré d'un polynome alors

c'est le carré d'un polynome de degré 2

disons $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$

$\alpha^2 = 1$ comme vu en calculant le coefficient

devant X^4 dans $Q^2 = P$

Ainsi $\alpha = \pm 1$ qui a changé Q en $-Q$

on peut supposer $\alpha = 1$

De même le coeff constant de $Q^2 - P$ vaut

$\gamma^2 - 1$ $(= Q(0)^2 - P(0))$ donc $\gamma^2 = 1$

et $\gamma = \pm 1$

$Q = X^2 + \beta X \pm 1$

et $Q^2 = X^4 + 2\beta X^3 + (\pm 2 + \beta^2) X^2 \pm 2\beta X + 1$

Ainsi $\pm 2\beta = 2$ et $\beta = \pm 1$

donc $\pm 2 + \beta^2 = \pm 2 + 1 = b$

et $2a = 2\beta$ donc $a = \beta$

ou bien $\gamma = \beta = +1$ et $b = 3$ $a = 1$

ou bien $\gamma = \beta = -1$ et $b = -1$ $a = -1$

Réciproquement On a bien $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2 + X + 1)^2$

et $X^4 - X^3 - X^2 + 2X + 1 = (X^2 - X - 1)^2$

Donc P est un carré ssi $a = 1$ et $b = 3$

ou $a = -1$ et $b = -1$

$\boxed{38}$ 1. Supposons que $P(X^2+1) = P$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$

On a $\deg(P(X^2+1)) = 2\deg(P)$ donc $2\deg(P) = \deg(P)$

ainsi $\deg(P) = 0$ ou $-\infty$

donc P est constant

Reciproquement si P est constant alors $P(X^2+1) = P$

$\{P \in \mathbb{C}[X],\ P(X^2+1) = P\} = \{\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

2 Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ avec $n = \deg(P)$

alors $P(2X+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (2X+1)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} 2^j \binom{k}{j} X^j$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} a_j 2^k \binom{j}{k} X^k$$

Si $P(2X+1) = P$ alors

$\forall k \in \{0,\dots,n\}$ $a_k = \sum_{j=k}^{n} a_j 2^k \binom{j}{k}$

Si $n \geqslant 0$, en particulier $a_n = a_n \times 2^n$

Or $a_n \neq 0$ car $n = \deg P$ donc $^n = 1$

et $\deg P = 0$

Ainsi $\deg P = 0$ ou $-\infty$ P est constant

Reciproquement tout polynôme constant verifie l'equation :

$\{P \in \mathbb{C}[X],\ P(2X+1) = P\} = \mathbb{R}$

Si $P = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} X^k$

alors $P' = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k X^{k-1}$

$$(1-X)P' = -\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} k X^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k X^k \right)$$

$$= -\frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) X^k - \sum_{k=1}^{n} k X^k \right)$$

$$= -\frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k - n X^n \right)$$

et $(1-X)P' - P = -\frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k - n X^n - \sum_{k=0}^{n} X^k \right)$

$$= -\frac{1}{n+1} \left(-(n+1) X^n \right)$$

$$= X^n$$

La seule solution à l'équation est

$-\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} X^k$

4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$

$\deg P' = \deg P - 1$

$\deg(P'^2) = 2(\deg P - 1)$

Si $P'^2 = 4P$ alors $2(\deg P - 1) = \deg P$

et $\deg P = 2$

P admet donc une racine $\alpha \in \mathbb{C}$

$P'(\alpha)^2 = 0$ et $P'(\alpha) = 0$ α est racine double de P. Ainsi $(X-\alpha)^2 \mid P$

On a donc $P = \lambda (X-\alpha)^2$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$

Ainsi $P' = 2\lambda (X-\alpha)$

et $P'^2 = 4\lambda^2 (X-\alpha)^2 = 4\lambda P$

Or $P'^2 = 4P$ donc $\lambda = 1$ et $P = (X-\alpha)^2$

Reciproquement si $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $P = (X-\alpha)^2$

Verifie $P'^2 = (2(X-\alpha))^2 = 4(X-\alpha)^2 = 4P$

Ainsi $\{P \in \mathbb{C}[X],\ P'^2 = 4P\} = \{(X-\alpha)^2,\ \alpha \in \mathbb{C}\}$

5. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$

$\deg (P(P(X))) = (\deg P)^2$

Si $P(P(X)) = P(X)$ alors $(\deg P)^2 = \deg P$

donc $\deg P = 0, 1$ ou $-\infty$

Si $\deg P = 1$ alors $P = aX + b$

avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

et $P(P(X)) = a(aX+b) + b = a^2X + ba + b$

donc $a^2 = a$ et $b + ba = b$

ainsi $ba = 0$

~~Donc~~

Ainsi $a \neq 0$ et $b = 0$ et $a = 1$

P est constant ou egal à X

Reciproquement si $P \in \mathbb{R}$ ou $P = X$ alors

$P(P) = P$ dans les deux cas.

$\{P \in \mathbb{C}[X],\ P(P) = P\} = \{X\} \cup \mathbb{R}$

$\boxed{40}$ 1. Si $k \in \mathbb{N}$ alors on rappelle l'identité

$$P_1^k - P_2^k = (P_1 - P_2) \sum_{j=0}^{k-1} P_1^j P_2^{k-1-j} \text{ et } P_1 - P_2 \mid P_1^k - P_2^k$$

Ainsi si $Q = \sum_{k=0}^{n} q_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $(q_k) \in \mathbb{C}^{n+1}$

on a $$Q(P_1) - Q(P_2) = \sum_{k=0}^{n} q_k P_1^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} q_k (P_1^k - P_2^k)$$

Or $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ $P_1 - P_2 \mid P_1^k - P_2^k$

donc $P_1 - P_2 \mid Q(P_1) - Q(P_2)$

2. D'après la question précédente

$$P - X \mid P(P) - P(X) = P(P) - P$$
donc $$P - X \mid P(P) - P + P - X = P(P) - X$$

Ainsi $P - X \mid P(P) - X$