TD 2

Ex 1 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6) \end{cases}$

(P_n) : $u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$ $\qquad$ (P_0) est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose (P_n) vraie. Alors $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$

$$= \frac{1}{3}\left(2n + \frac{1}{3^n} + 4n + 6\right)$$

$$= \frac{1}{3}(6n+6) + \frac{1}{3^{n+1}}$$

donc $u_{n+1} = 2(n+1) + \frac{1}{3^{n+1}}$ et (P_{n+1}) est vraie, l'hérédité est démontrée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$.

Ex 2 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} \end{cases}$ $\qquad$ $u_1 = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ...

(P_n) : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $(P_0), (P_1)$ sont vraies. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose (P_n) vraie,

alors $u_{n+1} = \frac{1/\sqrt{n+1}}{\sqrt{\frac{1}{n+1}+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$, donc (P_{n+1}) est vraie.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Ex 3 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases}$

1. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $(v_n) = (u_n - \lambda)$ soit une suite géométrique :

$$v_{n+1} = q v_n \iff u_{n+1} - \lambda = q(u_n - \lambda)$$
$$\iff 4u_n + 9 - \lambda = q u_n - q\lambda$$
$$\iff q = 4 \text{ et } 9 - \lambda = -4\lambda$$
$$\iff q = 4 \text{ et } \lambda = -3.$$

$(v_n) = (u_n + 3)$ est géométrique de raison 4

2. $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 4v_n \end{cases} \Rightarrow v_n = 4^{n+1}$, et donc $u_n = v_n - 3 = 4^{n+1} - 3$.

Ex 4 : 1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^3 \end{cases}$

$u_1 = 2^3$
$u_2 = 2^{3 \cdot 3} = 2^9$
$u_3 = 2^{9 \cdot 3} \dots$

Par récurrence : on montre que $u_n = 2^{3^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 2 v_n^3 \end{cases}$ On montre facilement que (v_n) est croissante, et donc strictement positive. En passant au logarithme

$\ln(v_{n+1}) = \ln(2) + 3\ln(v_n)$

Comme dans l'exercice 3, on cherche à transformer cette suite en suite géométrique :

$$\ln(v_{n+1}) + \frac{\ln(2)}{2} = 3\left(\ln(v_n) + \frac{\ln(2)}{2}\right)$$

donc $\ln(v_n) + \frac{\ln(2)}{2} = 3^n\left(\ln(v_0) + \frac{\ln(2)}{2}\right) = 3^n\left(\ln(3) + \frac{\ln(2)}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad \ln(v_n) + \ln(\sqrt{2}) = \ln\left(3^{3^n} \sqrt{2}^{3^n}\right)$

$\Rightarrow \quad v_n = 3^{3^n} \sqrt{2}^{3^n - 1}$

Ex 5 : 1. $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

$u_0 = 3 + 2^2 = 7$
$u_1 = 3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35$

(P_n) : u_n est divisible par 7. (P_0) et (P_1) sont vraies.

Hérédité : On suppose (P_n) vraie. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $u_n = 7k$,

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$$

donc $3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} = 9(7k - 2^{n+2}) + 2^{n+3}$
$= 9 \times 7k + 2^{n+2}(2 - 9)$
$= 7(9k - 2^{n+2})$

donc (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $7 \mid u_n$.

2. $v_n = 3^{2n} + 2^{6n-5}$

$v_1 = 3^2 + 2 = 11$
$v_2 = 3^4 + 2^7 = 81 + 128 = 209 = 19 \cdot 11$.

(P_n) : $11 \mid v_n$. (P_1) et (P_1) sont vraies

Hérédité : On suppose (P_n) vraie. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq

$V_n = 11k \Rightarrow 3^{2n} = 11k - 2^{6n-5}$

$$\begin{aligned}V_{n+1} = 3^{2n+2} + 2^{6n+1} &= 9(11k - 2^{6n-5}) + 2^{6n+1} \\ &= 9 \cdot 11k + 2^{6n-5}(2^6 - 9) \\ &= 9 \cdot 11k + 2^{6n-5}(64 - 9) \\ &= 11(9k + 5 \cdot 2^{6n-5})\end{aligned}$$

(P_{n+1}) vraie

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $11 \mid V_n$.

$\boxed{\text{Ex 6}}$:

1. $3^4 + 3^5 + \dots 3^{15} = \sum_{k=4}^{15} 3^k$

2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots \frac{10}{1024} = \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{2^k}$

3. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$

4. $2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50 = \sum_{k=1}^{25} (-1)^{k+1}(2k)$

$\boxed{\text{Ex 7}}$: 1. $(P_n) : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, (P_1) vraie.

(P_n) vraie $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$

$= \left(\frac{n}{2} + 1\right)(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$\Rightarrow (P_{n+1})$ est vraie

donc (P_n) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. $(P_n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \Rightarrow (P_1)$ vraie.

(P_n) vraie $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$$\begin{aligned}&= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)}{6}(2n^2 + n + 6n + 6) \\ &= \frac{(n+1)}{6}(2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{(n+1)}{6}(2n+3)(n+2)\end{aligned}$$

$\Rightarrow (P_{n+1})$ est vraie. Finalement, (P_n) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. $(P_n) : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\quad (P_1) : 1 = \frac{1 \cdot 2^2}{4}$ OK.

(P_n) vraie $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4(n+1)\right)$

$= \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 \Rightarrow (P_{n+1})$ est vraie.

donc (P_n) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

4. $(P_n) : 2^n \leq n!$ $\quad (P_4) : 2^4 = 16 \leq 24 = 4!$

(P_n) vraie $\Rightarrow 2^n \leq n! \Rightarrow 2^{n+1} \leq 2 \cdot n! \leq (n+1) \cdot n! = (n+1)!$

$\Rightarrow (P_{n+1})$ vraie

donc (P_n) est vraie $\forall n \geq 4$.

$\boxed{\text{Ex 8}}$: 1. $\binom{0}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$.

2. (a) $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$. Par commutativité de la multiplication,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \binom{p}{n-p}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et $1 \leq p \leq n-1$.

$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$, $\quad \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!}$

$= \frac{p\,(n-1)!}{p!\,(n-p)!} + \frac{(n-p)\,(n-1)!}{p!\,(n-p)!}$

$= \frac{n\,(n-1)!}{p!\,(n-p)!} = \binom{n}{p}$.

(c) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $(P_n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

~~* $(P_0) : 1 = 1$, OK.~~

* On suppose que (P_n) est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \implies (P_{n+1}) \text{ est vraie.}$$

* On peut en conclure que (P_n) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

3.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (-1+1)^n = 0$$

(b) Soient $n, p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq n$.

$$p \binom{n}{p} = \frac{p \cdot n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!\,(n-p)!} = \frac{n\,(n-1)!}{(p-1)!\,(n-1-(p-1))!}$$

$$= n \binom{n-1}{p-1}$$

(c) $$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$$

$$= n\, 2^{n-1}.$$

$\boxed{\text{Ex 9}}$: $a, b \in \mathbb{R}$. (P_n) : $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

On peut mener la récurrence à bien en écrivant

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a(a^n - b^n) + ab^n - b^{n+1}.$$

On peut aussi se passer de récurrence :

$$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k},$$

$$\text{donc} \quad (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$

$$= a^n - b^n.$$

$\boxed{\text{Ex 10}}$: 1. $$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$$

2. $$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = n(x+1)^{n-1}$$

$$\text{donc} \quad T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^k = x\, S_n'(x) = x\,n\,(x+1)^{n-1}.$$

3. $$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = T_n(1) = n\,2^{n-1}.$$

$\boxed{\text{Ex 11}}$: 1. $$\sum_{k=5}^{11} k = \frac{11\cdot 12}{2} - \frac{4\cdot 5}{2} = 46$$

2. $$\sum_{i=2}^{10} (3+5i) = 9\cdot 3 + 5\sum_{i=2} i = 27 + 5\left(\frac{10\cdot 11}{2} - 1\right) = 27 + 5\cdot 54$$
$$= 297.$$

3. $$\sum_{k=5}^{11} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}} = 2\cdot 3\sum_{k=5}^{11}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 6\left(\frac{2}{3}\right)^5 \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^7}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{6\cdot 32}{243}\cdot 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^7\right) = \frac{32\cdot 2}{243}\left(9 - \frac{128}{243}\right)$$

$$= \frac{64\cdot 2059}{3^{10}} = \frac{131\,776}{59\,049}$$

4. $$\sum_{i=2}^{10} \frac{48}{2^i} = 48\cdot\frac{1}{4}\,\frac{1-\frac{1}{2^9}}{1-\frac{1}{2}} = 12\left(2-\frac{1}{2^8}\right) = 12\left(\frac{511}{256}\right) = \frac{1533}{64}$$

5. $$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = n + 2\sum_{k=1}^{n} k = n + 2\,\frac{n(n+1)}{2} = n(n+2)$$

6. $$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k = -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k = -\frac{(-1)^n - 1}{-1-1} = \frac{(-1)^n - 1}{2}$$

(d'après l'exo 9).

7. $$\sum_{k=3}^{n} 5 = (n+1-3)\,5 = 5(n-2).$$

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2+2k+1) = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$

$$= \frac{3}{6}(n+1)(2n+1)n + \frac{2}{2}(n+1)n + n$$

$$= n\left(1+n+1+\frac{(n+1)(2n+1)}{2}\right) = n\left(n+2+n^2+\frac{2n+n}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= n\left(n^2+\frac{5}{2}n+\frac{5}{2}\right)$$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(2k^2-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k^3 - \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)$

10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}5^{2k} = \sum_{k=1}^{n}25^k = 25\,\frac{25^n-1}{25-1} = \frac{25}{24}\left(25^n-1\right).$

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(2^k+k^2+1\right) = 2\,\frac{2^n-1}{2-1} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n$

$$= 2^{n+1} + n - 2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{4^{k+1}} = \frac{3}{16}\,\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}\left(\frac{4^n-3^n}{4^n}\right).$

$\boxed{\text{Ex 12}}$: 1. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}3 = 3^{n+1}$

2. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k) = \left(\prod_{k=0}^{n}2\right)\left(\prod_{k=0}^{n}k\right) = 0$

3. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n+1}k}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n+1)!}{2^n\,n!}$

4. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}q^k = q^{\sum_{k=0}^{n}k} = q^{\frac{n(n+1)}{2}}$

5. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}q^{2^k} = q^{\sum_{k=0}^{n}2^k} = q^{2^{n+1}-1}$

$\boxed{\text{Ex 13}}$ 1. (a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k}+\frac{b}{k+1} \iff \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

$$\iff k(a+b)+a = 1$$

En particulier, $\left(k(a+b)+a = 1 \quad \forall k\in\mathbb{N}^*\right) \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-a=-1. \end{cases}$

donc $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = 1-\frac{1}{n+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)-\ln(k) = \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$

$= \ln(n+1)$.

3. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right)\left(\prod_{k=3}^{n+1} k\right)}{\left(\prod_{k=2}^{n} k\right)\left(\prod_{k=2}^{n} k\right)}$

$\displaystyle = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cdot k! = \sum_{k=0}^{n} (k+1-1)k! = \sum_{k=0}^{n} (k+1)!-k!$

$= (n+1)! - 1$.

$\boxed{\text{Ex } 14}$: $\displaystyle P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)$

1. $P_n(0) = 1$, $\displaystyle P_n(1) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k}{\prod_{k=1}^{n} k} = n+1$

$P_n(-n) = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$\displaystyle P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+x}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1+x-1}{k}\right) = \frac{\prod_{k=2}^{n+1}(k+x-1)}{\prod_{k=1}^{n} k}$

$\displaystyle = \frac{n+x}{x}\,\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+x-1)}{\prod_{k=1}^{n} k} = \frac{n+x}{x}\,P_n(x-1)$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$\displaystyle P_n(k) = \frac{n+k}{k}P_n(k-1) = \frac{(n+k)(n+k-1)}{k(k-1)}\cdots\frac{2+n}{2}\cdot\frac{1+n}{1}P_n(0)$

$\displaystyle = \frac{(n+k)!}{n!\,k!} = \binom{n+k}{k}$.

$\boxed{\text{Ex } 15}$: 1. $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n} 1 = n$

en effet, $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{ij}\right)$, on peut le voir en sommant soit sur les lignes, soit sur les colonnes, de :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. $$\sum_{1\leq i,j\leq n} ij = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} ij\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i\left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} i \, \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3. $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij = \sum_{1\leq j\leq i\leq n} ij$, donc $$2\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij = \sum_{1\leq i,j\leq n} ij + \sum_{1\leq i=j\leq n} ij$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \sum_{i=1}^{n} i^2$$

et finalement, $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij = \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$.