TD4

Ex1 : a) $\ln(x^2-1)-\ln(2x-1)+\ln(2)=0$ est bien définie ssi: $|x|>1$ et $2x>1$

donc ssi: $x\in$ ~~[illegible]~~ >1

Dans ce cas, ——— $=0 \iff \ln\left(\dfrac{2(x^2-1)}{2x-1}\right)=0$

$$\iff 2(x^2-1)=2x-1$$
$$\iff 2x^2-2x-1=0$$
$$\Delta = 12\ ,\quad x_1=\frac{2-\sqrt{12}}{4}<0\ ,\ x_2=\frac{2+\sqrt{12}}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}>1$$

donc la seule solution est $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

b) $\log_{10}(x+2)-\log_{10}(x+1)=\log_{10}(x-1) \iff x>1$ et $\dfrac{x+2}{x+1}=x-1$

$$\iff x>1 \text{ et } x+2=(x-1)(x+1)=x^2-1$$
$$\iff x>1 \text{ et } x^2-x-3=0$$
$$\iff x>1 \text{ et } x\in\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2}\ ;\ \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$$
$$\iff x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Ex2 : Le nombre de chiffres en base 10 de N est $[\log_{10}(N)]+1$,

car $10^k \leqslant N \leqslant 10^{k+1}-1 \iff$ N a $k+1$ chiffres.

Alors on calcule $[\log_{10}(2^{243112609})]=[243112609\log_{10}(2)]$

La calculatrice donne: $= 73\,184\,187$.

Ex3 : On cherche à ~~résoudre~~ trouver $x_0>0$ tq la tangente au graphe de ln en x_0 passe par O. L'équation de la tangente à ln en x_0 est : $T_{x_0}: y=\ln(x_0)+\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$

Elle passe par $(0,0) \iff \ln(x_0)+\dfrac{1}{x_0}(0-x_0)=0 \iff \ln(x_0)-1=0 \iff x_0=e$.

$\boxed{\text{Ex 4}}$: On considère $f_1 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x - \ln(1+x)$.

f_1 est dérivable, et si $x \in \mathbb{R}_+$, $f_1'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \geq 0$

donc f_1 est croissante, et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_1(x) \geq f_1(0) = 0$.

Ainsi, $\forall x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.

De la même manière, on vérifie que $x \longmapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

$\boxed{\text{Ex 5}}$: On suppose que $\log_{10}(2) \in \mathbb{Q}$, càd $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tq

$$\log_{10}(2) = \frac{p}{q} \iff 2 = 10^{\frac{p}{q}}$$
$$\iff 2^q = 10^p = (2 \cdot 5)^p$$
$$\iff 2^{q-p} = 5^p$$

or, $\log_{10}(2) \in]0;1[$, donc $p \geq 1$ et $p < q$.

alors 2^{q-p} est pair et 5^p est impair, c'est impossible.

$\Rightarrow \log_{10}(2) \notin \mathbb{Q}$.

$\boxed{\text{Ex 6}}$: $\ln(1+|x|) = \frac{1}{x-1}$

Si $x < 1$, alors pas de solution car $\ln(1+|x|) \geq 0$ et $\frac{1}{x-1} < 0$.

On cherche $x > 1$ tq $\ln(1+x) = \frac{1}{x-1}$.

$f(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{x-1}$ bien déf sur $]1;+\infty[$, dérivable, et

$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(x-1)^2} > 0$, donc f stri. $\nearrow$ et continue, c'est une

bij. entre $]1;+\infty[$ et $]\lim\limits_{x \to 1} f(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[=]-\infty ; +\infty[$.

donc 0 admet exactement un antécédent. De plus,

$f(2) = \ln(3) - \frac{1}{2} > 0$, donc $\alpha = f^{-1}(0) \in]1;2[$.

$\boxed{\text{Ex 7}}$

$2^0 \geq 0$
$2^1 \geq 1^2$
$2^2 = 2^2$
$2^3 = 8 < 3^2 = 9$
$2^4 = 4^2$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$2^n \geq n^2 \iff n\ln(2) \geq 2\ln(n)$.

On étudie sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f(x) = x\ln(2) - 2\ln(x)$

$$f'(x) = \cancel{x}\ \ln(2) - \frac{2}{x}$$

x		$\frac{2}{\ln(2)}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Or, $4 > \frac{2}{\ln(2)}$, donc $\forall\ n \geq 4$, $f(n) \geq 0$ et donc $2^n \geq n^2$

Alors $\{n \in \mathbb{N} \ /\ 2^n \geq n^2\} = \mathbb{N}\setminus\{3\}$.

$\boxed{\text{Ex 8}}$: a) f est impaire

b) $g(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x}{e^x} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est impaire

c) $h(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{e^x\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2} = \frac{1}{\left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right)^2}$ est paire.

$\boxed{\text{Ex 9}}$: a) $e^{2x} - e^{x} - 6 = 0$. On pose $X = e^x$, alors

$e^{2x} - e^x - 6 = 0 \implies X^2 - X - 6 = 0$

$\implies X \in \left\{\frac{1+5}{2} ; \frac{1-5}{2}\right\} = \{3, -2\}$

$X \geq 0$, donc $X = -2$ est exclu. Ainsi, $\{x \in \mathbb{R} \ /\ e^{2x} - e^x - 6 = 0\} = \{\ln(3)\}$.

b) $x \in \mathbb{R}$, $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0 \iff 3e^{2x} - 20e^x - 7 = 0$

$\iff e^x \in \left\{\frac{20 + \sqrt{484}}{6} ; \frac{20 - \sqrt{484}}{6}\right\} = \left\{7, -\frac{1}{3}\right\}$

$\iff x = \ln(7)$.

c) $e^{5x} + e^{3x} + e^x = 0$

$x \in \mathbb{R} \implies e^{5x} > 0$, $e^{3x} > 0$ et $e^x > 0$, donc pas de solution

---

$\boxed{\text{Ex 10}}$. a) $\ln(x) - e^x = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$

or, $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ $\quad \frac{e^x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

donc $\ln(x) - e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{y^6}{e^y} = \lim\limits_{y\to+\infty} \left(\dfrac{y}{e^{y/6}}\right)^6 = \lim\limits_{z\to+\infty} 6^6\left(\dfrac{z}{e^z}\right)^6 = 0$

c) $\dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}} \geqslant \dfrac{\ln(e^x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

donc $\dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

d) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}+1}{e^{x^2}+1} = \dfrac{1+e^{-\sqrt{x}}}{e^{x^2-\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}$, or $e^{-\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

et $x^2 - \sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

donc $\dfrac{e^{\sqrt{x}}+1}{e^{x^2}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{\text{Ex 11}}$: 1. $f : x \longmapsto e^x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = e^x - 1$$

donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1 > x$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^x - x}$

(a) f est une fraction de fonction continue et strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc est continue.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1 - xe^{-x}} = \dfrac{1}{1 - \frac{x}{e^x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

c) $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x - x) - e^x(e^x-1)}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

d) f atteint un maximum en 1, et $f(1) = \dfrac{e}{e-1}$.

$\boxed{\text{Ex } 12}$ $f(x) = \cos(3x)\cos^3(x)$

1. $f(-x) = f(x)$ car $\cos$ est paire

$f(x+\pi) = \cos(3x + 3\pi)\cos^3(x+\pi)$

$= \cos(3x+\pi)\cos^3(x+\pi) = -\cos(3x)(-\cos(x))^3 = \cos(3x)\cos(x)^3$

f est paire et π-périodique $\Rightarrow$ il suffit de l'étudier sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

2. $f'(x) = -3\sin(3x)\cos^3(x) - 3\cos(3x)\sin(x)\cos^2(x)$

$= -3\cos^2(x)\left(\sin(3x)\cos(x) + \cos(3x)\sin(x)\right)$

$= -3\cos^2(x)(\sin(4x))$

x	0	$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$\cancel{+}$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	1		$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

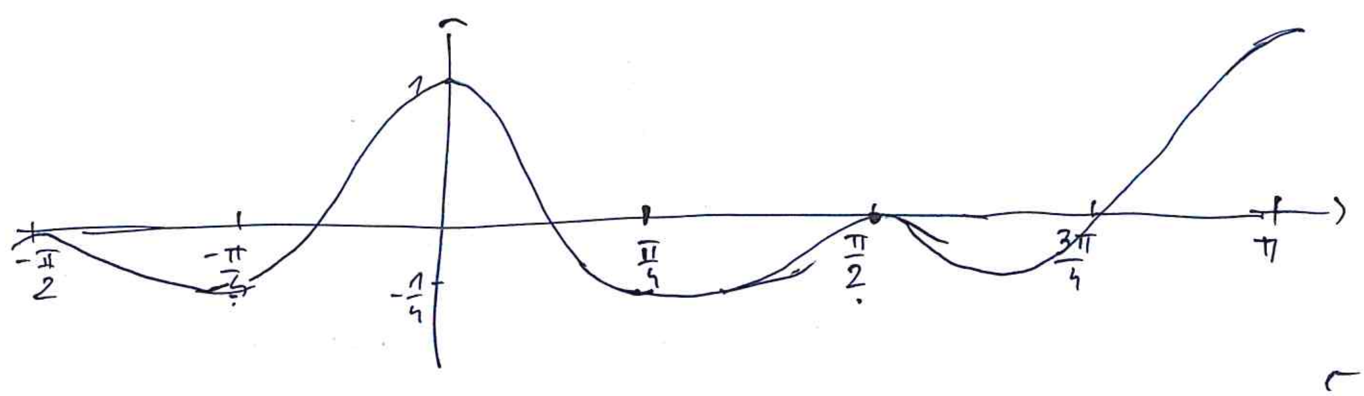
$f(\frac{\pi}{2}) = 0$

$f(\frac{\pi}{4}) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= -\cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = -\frac{1}{4}$

3.



Ex 13 :

a) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

c) $\arctan(\sqrt{3}) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/3)}\right) = \frac{\pi}{3}$

d) $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{3} \in [0;\pi]$, donc

e) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$

f) $\arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$= \arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}.$

Ex 14 :

a) $\sin^2(x) = 1$: bien déf sur $\mathbb{R}$.

$\sin^2(x) = 1 \iff |\sin(x)| = 1$

$\iff x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$

b) $\cos(x) = \frac{1}{2}$: bien défini sur $\mathbb{R}$.

$\cos(x) = \frac{1}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$

c) $\arcsin(x) = \frac{\pi}{3}$ bien déf pour $x \in [-1;1]$.

$\arcsin(x) = \frac{\pi}{3} \iff \sin(\arcsin(x)) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\iff x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Ex 15 : 1. <u>$\arcsin \circ \sin$</u> $\sin : \mathbb{R} \to [-1;1]$, $\arcsin : [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

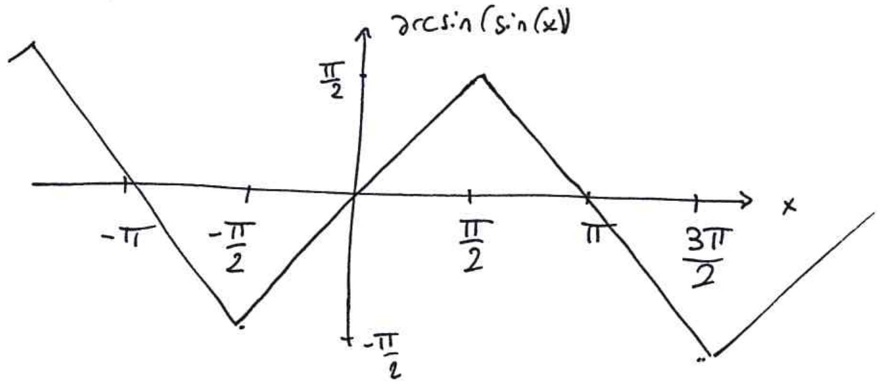
donc bien déf sur $\mathbb{R}$.

* $\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$, donc $\left(\arcsin \circ \sin\right)|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} = id.$

* $\arcsin \circ \sin$ est 2π-périodique, donc il suffit de connaître $\arcsin \circ \sin$ sur un intervalle de longueur 2π, par ex $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

* Si $x \in [\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$, $\quad \arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(\pi - x))$

$\pi - x \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ $\qquad = \pi - x$

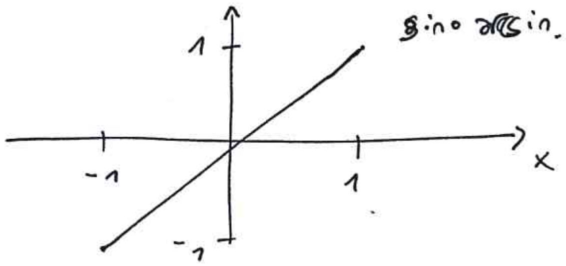


Sin o arcsin : $\quad \arcsin : [-1;1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$

donc $\sin \circ \arcsin$ est bien déf sur $[-1;1]$,

et $\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$, donc $\sin \circ \arcsin = id|_{[-1;1]}$



2. a) $\arcsin : [-1;1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\Big\}$ $\tan(\arcsin(x))$ est bien déf pour $x \in]-1;1[$.

Soit $x \in]-1;1[$. On pose $y = \arcsin(x)$. Alors $y \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos(y) > 0$, et

$$\tan(\arcsin(x)) = \tan(y) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \frac{\sin(y)}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}}$$

De plus, $\sin \circ \arcsin(x) = x$, donc $\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) $\arccos : [-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$

$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$ $\Big\}$ $\sin \circ \arccos$ est bien défini sur $[-1;1]$.

Soit $x \in [-1;1]$. Alors $\arccos(x) \in [0;\pi]$ et

$$0 \leq \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}$$

c) $\left.\begin{array}{l} \cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1] \\ \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\end{array}\right\}$ $\cos \circ \arctan$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $y \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. $\tan^2(y) = \dfrac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} = \dfrac{1-\cos^2(y)}{\cos^2(y)}$

$\tan \circ \arctan = id_{|\mathbb{R}}$ $\Rightarrow \cos^2(y) = \dfrac{1}{1+\tan^2(y)}$

$\Rightarrow \cos(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(y)}}$, car $\cos(y) \geq 0$.

Ainsi, si $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan(x))}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\boxed{\text{Ex 16}}$: $f(x) = \arccos(x) + \arcsin(x)$.

f est dérivable sur $[0,1[$, continue sur $[0;1]$, et si $x \in [0,1[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, donc f est constante sur $[0,1[$, et sur $[0,1]$ par continuité. Alors, $\forall x \in [0,1]$,

$$f(x) = f(0) \Rightarrow \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{\text{Ex 17}}$: $p \in \mathbb{N}$

1. On rappelle que si $a, b \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \Rightarrow \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

Alors $\tan(\underbrace{\arctan(p)}_{\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[} - \underbrace{\arctan(p+1)}_{\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}) = \dfrac{p - (p+1)}{1+p(p+1)}$

$$= -\frac{1}{1+p+p^2}$$

donc $\arctan\left(\tan\left(\arctan(p+1) - \arctan(p)\right)\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{1+p+p^2}\right)$

~~Alors~~ arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$

φ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

donc h est dérivable (au moins) sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$,

$$h'(x) = \varphi'(x)\arctan'(\varphi(x)) = \frac{2(1-x^2)+2x(2x)}{(1-x^2)^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2+4x^2} = \frac{2(1+x^2)}{1+2x^2+x^4} = \frac{2}{1+x^2}$$

$$= 2\arctan'(x).$$

$\boxed{\text{Ex 19}}$: $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = 2 \iff \frac{e^x+e^{-x}}{2} = 2 \iff e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$

$$\iff e^x \in \left\{\frac{4+\sqrt{12}}{2} ; \frac{4-\sqrt{12}}{2}\right\}$$

$$\iff x \in \{\ln(2+\sqrt{3}) ; \ln(2-\sqrt{3})\}$$

$\boxed{\text{Ex 20}}$: $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\sinh\left(\frac{1}{x}\right)$

1. f est paire $\Rightarrow$ il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. $f(x) = \frac{x}{2}\left(e^{1/x} - e^{-1/x}\right)$ $\qquad xe^{1/x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, $\quad xe^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

   donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^\pm]{} +\infty$

   $$\lim_{x\to+\infty} x\sinh\left(\tfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\,\mathrm{sh}(x) = \mathrm{sh}'(0) = 1.$$

   donc $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$

3. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et sh et id sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Par composition et produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et

   $$x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f'(x) = \mathrm{sh}\left(\tfrac{1}{x}\right) - x\frac{1}{x^2}\mathrm{ch}\left(\tfrac{1}{x}\right) = \mathrm{sh}\left(\tfrac{1}{x}\right) - \tfrac{1}{x}\mathrm{ch}\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

4. On considère $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y - \mathrm{th}(y)$

   g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et si $y \in \mathbb{R}_+$, $\quad g'(y) = 1 - \mathrm{th}'(y)$
   $$= \mathrm{th}^2(y) \geq 0$$

de plus, $\arctan(p+1) \in [0;\frac{\pi}{2}[$ et $\arctan(p) \in [0;\frac{\pi}{2}[$, donc

$\arctan(p+1) - \arctan(p) \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et finalement,

$$\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right) = \sum_{p=0}^{n} \arctan(p+1) - \arctan(p)$$

$$= \arctan(n+1) - \arctan(0) = \arctan(n+1)$$

donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{Ex } 18}$: a) $f(x) = \sqrt{\arcsin(x)}$ $\quad \arcsin : [-1;1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$\sqrt{\ } : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

donc f est définie sur $[0;1]$.

arcsin est dérivable sur $]-1;1[$, et $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\sqrt{\arcsin}$ est dérivable sur $]0;1[$ (au moins.) Si $x \in]0,1[$,

$$\left(\sqrt{\arcsin(x)}\right)' = \frac{\arcsin'(x)}{2\sqrt{\arcsin(x)}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{\arcsin(x)}} \xrightarrow[\substack{x\to1 \\ x\to0}]{} +\infty$$

(donc f est dérivable exactement sur $]0;1[$.)

b) $g(x) = \arcsin(\cos(x))$ $\quad \cos : \mathbb{R} \longrightarrow$ ~~$\mathbb{R}$, dérivable~~ $[-1;1]$, dérivable sur $\mathbb{R}$

$\arcsin : [-1;1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, dérivable sur $]-1;1$

donc g est définie sur $\mathbb{R}$, et dérivable en x $\forall x$ tq $|\cos(x)| \neq 1$

g est dérivable (au moins) sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Si $x \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, $\quad g'(x) = -\sin(x)\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = -\frac{\sin(x)}{|\sin(x)|}$

c) $h(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ $\quad \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$,

$\varphi : x \longmapsto \frac{2x}{1-x^2}$

$\mathbb{R}\setminus\{\pm1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

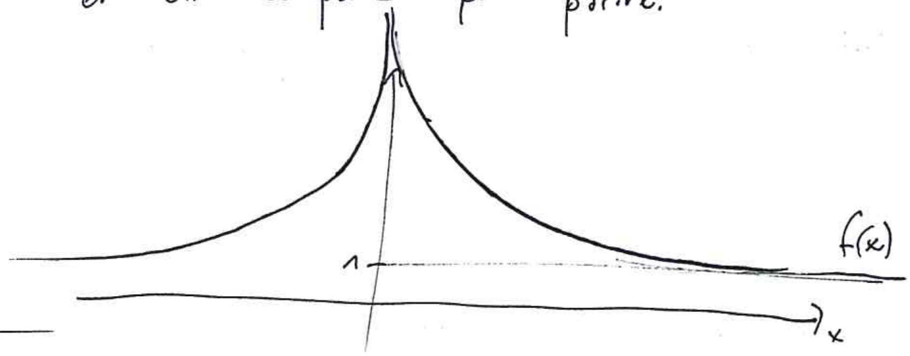
Par conséquent, g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall y \in \mathbb{R}_+$,

$$g(y) \geq g(0) = 0 \Rightarrow y \geq th(y)$$

En particulier, $x \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow f'(x) = \underbrace{ch\left(\frac{1}{x}\right)}_{\geq 0} \Bigg(\underbrace{\frac{sh\left(\frac{1}{x}\right)}{ch\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{x}}_{\leq 0} \Bigg)$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1

et on complète par parité.



$\boxed{\text{Ex 21}}$: $\begin{cases} ch(x) + ch(y) = a \\ sh(x) + sh(y) = b \end{cases}$ $(*)_{a,b}$ on cherche des conditions sur a,b ~~tq~~ pour que le système admette ~~des~~ une solution.

~~ch > sh, donc il faut~~ Supposons que (x,y) soit une solution de $(*)_{a,b}$. $ch(x) > sh(x)$, $ch(y) > sh(y)$, donc $\boxed{a > b.}$

$$\begin{cases} ch(x) + ch(y) = a \\ sh(x) + sh(y) = b \end{cases} \iff \begin{cases} e^{x} + e^{y} = a+b \\ e^{-x} + e^{-y} = a-b \end{cases} \Rightarrow \boxed{a+b > 0}$$

On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$, alors

$$(x,y) \text{ est solution de } (*)_{a,b} \iff \begin{cases} X + Y = a+b \\ \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = a-b \end{cases} \iff \begin{cases} X + Y = a+b \\ \frac{X+Y}{XY} = a-b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X+Y = a+b \\ XY = \frac{a+b}{a-b} \end{cases}$$

$\iff$ ~~donc~~ X et Y sont racines du polynôme ~~P(Z)~~ $P(Z) = (Z-X)(Z-Y)$

$$= Z^2 - (a+b)Z + \frac{a+b}{a-b}$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b} \geq 0 \iff \boxed{(a+b)\left(a+b - \frac{4}{a-b}\right) \geq 0}$$

~~Réciproquement, si P admet deux racines >0, alors on a (l'unique) couple solution.~~

~~Les solutions sont~~ $\cancel{Z_1 = \frac{1}{2}\left(a+b + \sqrt{(a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b}}\right)}$

~~et~~ $\cancel{Z_2 = \frac{1}{2}\left(a+b - \sqrt{(a+b)^2 - 4\left(\frac{a+b}{a-b}\right)}\right)}$

$\cancel{Z_1, Z_2 > 0 \iff \begin{cases} a+b>0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}}$

~~Ainsi, il faut et il suffit que~~ $\cancel{a+b>0}$ ~~et~~

$\cancel{a+b-\frac{4}{a-b} \geq 0 \iff a+b}$

Réciproquement, si $\begin{cases} a+b>0 \\ a-b>0 \\ (a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b} \geq 0 \end{cases}$

alors P admet deux racines, $\frac{1}{2}\left(a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - \frac{4(a+b)}{a-b}}\right) > 0$

et donc le système admet une solution.

Conclusion : $(*)_{a,b}$ admet une solution $\iff \begin{cases} a+b>0 \\ a-b>0 \\ (a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b} \geq 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a+b>0 \\ a-b>0 \\ a^2-b^2 \geq 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b>0 \\ (a+b)(a-b)\geq 4 \end{cases}$

$\boxed{\text{Ex 22}}$: Soit $x \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{1+th(x)}{1-th(x)}\right)^n = \frac{1+th(nx)}{1-th(nx)}$

Pour $n=1$: ok

Supposons que c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\frac{1+th((n+1)x)}{1-th((n+1)x)} = \frac{1+\frac{th(x)+th(nx)}{1+th(x)th(nx)}}{1-\frac{th(x)+th(nx)}{1+th(x)th(nx)}} = \frac{1+th(x)th(nx)+th(x)+th(nx)}{1+th(x)th(nx)-th(x)-th(nx)}$$

$$= \left(\frac{1+th(x)}{1-th(x)}\right)\left(\frac{1+th(nx)}{1-th(nx)}\right)$$

D'après l'hyp. de récurrence, $\frac{1+th((n+1)x)}{1-th((n+1)x)} = \left(\frac{1+th(x)}{1-th(x)}\right)^{n+1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{1+th(x)}{1-th(x)}\right)^n = \frac{1+th(nx)}{1-th(nx)}$.