$\boxed{\text{TD 5}}$

Ex 1 : $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

1. $\exists x \in I,\ f(x) = 0$
2. $\forall x \in I,\ f(x) = 0$
3. $\exists x, y \in I,\ f(x) \neq f(y)$
4. $\forall x, y \in I,\ x \geqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$
5. $\forall x, y \in I,\ x \geqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
6. $\exists x \in I,\ \forall y \in I,\ f(y) \geqslant f(x)$
7. $\exists x \in I,\ \forall y \in I,\ f(y) \leqslant f(x)$.

Ex 2 :

1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$
2. $\nexists x \in I,\ f(x) \neq 0$
3. $\forall x, y \in I,\ f(x) = f(y)$
4. $\nexists (x,y) \in I^2,\ x \geqslant y$ et $f(x) < f(y)$
5. $\exists x, y \in I,\ x \geqslant y$ et $f(x) > f(y)$
6. $\forall x \in I,\ \exists y \in I,\ f(y) < f(x)$
7. $\forall x \in I,\ \exists y \in I,\ f(y) > f(x)$.

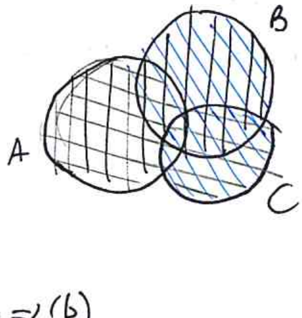
Ex 3 : $A, B, C \subset E$

1. $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \notin C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus C.$

Rq



$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C) = (A \cap B \cap C) \cup ((A \cap B) \setminus C) \cup ((B \cap C) \setminus A) \cup ((A \cap C) \setminus B)$$

$$= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$$

2. $\underline{(a) \Rightarrow (b)}$ Supposons que $A \subset B$.
Par définition, $A \cap B \subset A$. Soit $x \in A$. $A \subset B$, donc $x \in B$, donc $x \in A \cap B$

$\Rightarrow A \subset A \cap B$

d'où finalement $A \cap B = A$

$\underline{(b) \Rightarrow (c)}$ Supposons que $A \cap B = A$.
Alors $A \cup B = (A \cap B) \cup B = (A \cup B) \cap (B \cup B) = (A \cup B) \cap B$

$B \subset A \cup B$ par définition, donc d'après $((a) \Rightarrow (b))$,

$$(A \cup B) \cap B = B$$

donc $A \cup B = B$.

(c) $\Rightarrow$ (d) : Supposons que $A \cup B = B$.

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B \text{ , et } (A \setminus B) \cap B = \emptyset$$

donc $A \cup B = B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$.

(d) $\Rightarrow$ (a) : Supposons que $A \setminus B = \emptyset$

$A \setminus B = A \cap B^c$, donc $(A \cap B^c)^c = E$

$$A^c \cup B = E$$

Or, $A^c \cup A = E$ et $A^c \cap A = \emptyset$, donc $A \subset B$.

Conclusion : (a), (b), (c) et (d) sont équivalentes.

3. (a) $\Rightarrow$ (b). On suppose que $A \cup B = A \cap C$.

Par déf. $A \cap C \subset A \subset A \cup B$, donc

$$A \cap C = A = A \cup B$$

D'après 2., on en déduit que $B \subset A \subset C$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Supposons que $B \subset A \subset C$. Alors $B \cup A = A$ et $A \cap C = A$, donc $B \cup A = A \cap C$.

Conclusion: (a) $\Leftrightarrow$ (b).

4. * Supposons que $A \cap B = A \cap C$ et $B \setminus A = C \setminus A$,

alors $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A) = (C \cap A) \cup (C \setminus A) = C$.

* Supposons que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$.

Soit $x \in B$. Deux cas possibles: soit $x \in B \setminus A$, soit $x \in B \cap A$.

Si $x \in B \setminus A$, alors $x \in (B \cup A) \setminus A = (C \cup A) \setminus A = C \setminus A \subset C$

Si $x \in B \cap A$, alors $x \in C \cap A \subset C$

donc $B \subset C$.

$\boxed{\text{Ex 4}}$ a) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto n+1$ est injective mais pas bijective
$f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$.

b) $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \longmapsto n+1$ est bijective, $g^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \longmapsto n-1$

c) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (2x-y, 4x-2y)$ Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$.

$$h(x,y) = f(x',y') \iff \begin{cases} 2x-y = 2x'-y' \\ 4x-2y = 4x'-2y' \end{cases} \iff 2x-y = 2x'-y'$$

donc h n'est pas injective. Par exemple, $h(1,2) = f(0,0) = (0,0)$.

Soit $a,b \in \mathbb{R}$. tels que $(a,b) \in h(\mathbb{R}^2)$. Alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $f(x,y) = (a,b) \Rightarrow \begin{cases} 2x-y = a \\ 4x-2y = b \end{cases} \Rightarrow 2a = b$

donc $h(\mathbb{R}^2) \neq \mathbb{R}^2$, et h n'est pas surjective.

d) $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ Soit $y \in \mathbb{R}$. et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y = f(x) \iff y = \frac{x+1}{x-1}$$
$$\iff (x-1)y = x+1$$
$$\iff x(y-1) = y+1$$
$$\iff y \neq 1 \text{ et } x = \frac{y+1}{y-1}$$

donc k est injective mais pas surjective.

Par contre, on remarque que $\tilde{k} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $x \longmapsto k(x)$ est une bijection,

et $\tilde{k}^{-1} = \tilde{k}$.

$\boxed{\text{Ex 5}}$ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto 2n$ $\qquad g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$

f est injective ($f(n) = f(m) \Rightarrow 2n = 2m \Rightarrow n = m$) mais pas surjective ($f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$).

g est surjective ($\forall n \in \mathbb{N}, g(2n) = n$) mais pas injective ($g(0) = g(1) = 0$)

Soit $n \in \mathbb{N}$. $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n) = E\left(\frac{2n}{2}\right) = E(n) = n$

, donc $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$

Par contre, $f \circ g(n) = 2E(\frac{n}{2})$, donc $f \circ g \neq id_{\mathbb{N}}$.

par ex., $f \circ g(0) = 0$, $f \circ g(1) = 0$

$f \circ g(2) = 2$, $f \circ g(3) = 2$ ...

$\boxed{\text{Ex 6}}$: $f : \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$

$1 \longmapsto 4$

$2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 2$

$4 \longmapsto 2$

$f^{-1}(\{2\}) = \{3,4\}$

$f^{-1}(\{1,2\}) = \{2,3,4\}$

$f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$

$\boxed{\text{Ex 7}}$: $f : E \longrightarrow F$, $Card(E) = Card(F) = n$.

Si f est bijective, alors f est injective et surjective, donc (c) $\Rightarrow$ (a) et (c) $\Rightarrow$ (b). Il suffit donc de mq (a) $\Rightarrow$ (c) et (b) $\Rightarrow$ (c).

Supposons que f est injective. Alors, comme chaque élément de l'image de E par f a exactement un antécédent,

$Card(f(E)) = n$. Or, $f(E) \subset F$ et $Card(F) = n$, donc $f(E) = F$, et donc f est surjective, et donc bijective.

Supposons maintenant que f n'est ~~surjective~~ pas injective. Alors

$Card(f(E)) < Card(E) = n$, donc $f(E) \subsetneq F$ et f n'est pas surjective. On a donc mq (a) $\Rightarrow$ (b) et

$\neg(a) \Rightarrow \neg(b)$,

donc (a) $\Leftrightarrow$ (b)

Comme de plus (a) $\Leftrightarrow$ (c), on a bien (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c).

$\boxed{\text{Ex 8}}$: $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = [\![1;n]\!]$.

1. $n \geq 2$. $f : I_2 \longrightarrow I_n$ est injective $\Leftrightarrow$ $f(1) \neq f(2)$.

Choisir une telle f revient donc à choisir un élément de $[\![1;n]\!]$, puis un autre qui est différent. Il y a donc $n(n-1)$ choix possibles, qui correspondent à autant de fonctions injectives différentes.

2. Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. Si $f : I_p \to I_n$ est strictement croissante, elle est injective, et donc $\mathrm{Card}(I_p) = p \leq \mathrm{Card}(I_n) = n$. Par conséquent, si $p > n$, il n'existe aucune fonction strictement croissante $I_p \to I_n$.

Supposons donc que $p \leq n$. Une fonction strictement croissante est entièrement déterminée par son image $f(I_p) = \{f(1), \dots f(p)\}$.
En effet, étant donné un ~~ensemble~~ sous-ensemble de I_n à p éléments, il existe $n_1, \dots n_p \in I_n$ tels que :

$$1 \leq n_1 < \dots < n_p \leq n,$$

et on peut donc lui faire correspondre la fonction $\begin{array}{rcl} f : I_p & \to & I_n \\ k & \mapsto & n_k \end{array}$

qui est strictement croissante.

Ainsi, $\mathrm{Card}\{$fonctions strictement croissantes $I_p \to I_n\}$
$= \mathrm{Card}\{$sous-ensembles de I_n à p éléments$\}$
$= \binom{n}{p}$.

3. $f : I_p \to I_n$ est

- injective $\Rightarrow \mathrm{Card}(I_p) = \mathrm{Card}(f(I_p)) = p \leq \mathrm{Card}(f(I_n)) = n$
- surjective $\Rightarrow \mathrm{Card}(I_n) = \mathrm{Card}(f(I_p)) = n \leq \mathrm{Card}(I_p) = p$.
- bijective $\Rightarrow p = n$.

Réciproquement, si $p \geq n$, la fonction $\begin{array}{rcl} f : I_p & \to & I_n \\ p & \mapsto & \min(p, n) \end{array}$ est surjective

si $p \leq n$, la fonction $\begin{array}{rcl} f : I_p & \to & I_n \\ p & \mapsto & p \end{array}$ est injective

si $p = n$, ——— $f = id_{I_n}$ est bijective

Ex 9 : Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

On peut supposer que $E = [\![1;n]\!]$. Comptons le nombre de bijection $E \to E$.

Pour construire une bijection $E \to E$, on peut choisir $f(1)$ parmi $[\![1;n]\!]$; il y a n choix possibles.

On peut ensuite choisir $f(2)$ parmi $[\![1;n]\!] \setminus \{f(1)\}$, soit $n-1$ choix possibles.

Pour $f(2)$, $n-2$ choix possibles, etc.

Au total, il ~~ya~~ y a $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \times 1 = n!$ choix possibles, donc $n!$ bijections de E dans E.

Ex 10 : 1. Soit E un ensemble tq $\mathrm{Card}(E) = n \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\{A \subset E,\ \mathrm{Card}(A) = k\})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

2. Par récurrence : $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\emptyset)) = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout ensemble E tq $\mathrm{Card}(E) = n$, on a $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Soit F un ensemble de cardinal $n+1$. Il existe donc E de cardinal n tel que $F = E \cup \{x\}$. Alors

$$\mathcal{P}(F) = \{A \cup \{x\},\ A \in \mathcal{P}(E)\} \cup \{A,\ A \in \mathcal{P}(E)\}.$$

et ces ensembles sont disjoints, donc

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(F)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) + \mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{n+1}.$$

Par principe de récurrence, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Card}(E) = n \implies \mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Ex 11 : $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$n \longmapsto \begin{cases} 2n-1 & \text{si } n>0 \\ -2n & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$$

Par construction, $\varphi(\mathbb{N}^*) = 2\mathbb{N}+1$

et $\varphi(\mathbb{Z}_-) = 2\mathbb{N}$

donc φ est surjective.

De plus, φ est clairement injective, car si $\varphi(n) = \varphi(m)$, alors $\varphi(n)$ et $\varphi(m)$ ont, en particulier, même parité. Par exemple, s'ils sont pairs, $\Rightarrow$ $n \leq 0$ et $m \leq 0$

$\Rightarrow \quad -2n = -2m \quad \Rightarrow n = m.$

Même raisonnement s'ils sont impairs.

On en conclut que $\mathbb{Z}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$ est dénombrabl

Ex 12 : $f : E \longrightarrow F$, $A \subset E$, $B \subset F$.

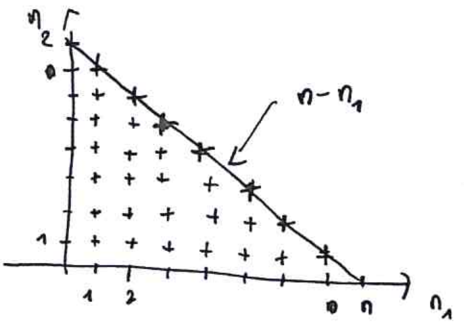
1. Si A est finie, alors $f(A)$ est finie : c'est vrai.
2. $f(A)$ finie $\Rightarrow$ A finie : faux. Par exemple :

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto 0$ $\quad A = \mathbb{N}$, $f(A) = \{0\}$

3. B finie $\Rightarrow f^{-1}(B)$ finie : faux. par ex, $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto 0$, $B = \{0\}$, $f^{-1}(B) = \mathbb{N}$.
4. $f^{-1}(B)$ finie $\Rightarrow B$ finie : FAUX, $f(f^{-1}(B)) \subset B$, mais pas d'$=$.

Par exemple, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$, $f^{-1}(\mathbb{R}_-) = \{0\}$. ~~donc 1. ⇒~~ 4.

Ex 13 :



Le nombre de couples $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n_1 + n_2 \leq n$ est égal au nombre de points à coordonnées entières dans le triangle délimité par $\begin{cases} n_2 = n - n_1 \\ n_1 = 0 \\ n_2 = 0 \end{cases}$

et donc $\mathrm{Card}(\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2,\ n_1 + n_2 \leq n\}) = n + (n-1) + \dots + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$

De la même manière, $\mathrm{Card}(\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2,\ n_1 + n_2 = n\}) = n$.

On peut faire le même raisonnement en dimension 3 :

$$\{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3,\ n_1+n_2+n_3=n\} = \bigcup_{n_3=0}^{n} \{(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2,\ n_1+n_2=n-n_3\}$$

et cette union est disjointe. Par conséquent,

$$\mathrm{Card}(\{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3,\ n_1+n_2+n_3=n\}) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\{(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2,\ n_1+n_2=n-k\})$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

et $\mathrm{Card}(\{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3,\ n_1+n_2+n_3\leq n\})$

$$= \bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3,\ n_1+n_2+n_3=k\})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)}{2}.$$

On généralise par récurrence : si $P_k^n = \mathrm{Card}(\{(n_1,\dots,n_k)\in\mathbb{N}^k,\ \sum_{i=1}^{k} n_i = n\})$

et $Q_k^n = \mathrm{Card}(\{(n_1,\dots,n_k)\in\mathbb{N}^k,\ \sum_{i=1}^{k} n_i \leq n\})$

alors $P_{k+1}^n = Q_k^n$

et $Q_{k+1}^n = \sum_{i=0}^{n} P_k^i$

$\boxed{\text{Ex 14}}$: Soit $f : E \longrightarrow F$.

1. Il est toujours vrai que $\mathrm{Card}(f(E)) \leq \mathrm{Card}(E)$.
Si f est injective, alors $\tilde{f} : E \longrightarrow f(E)$, $x \longmapsto f(x)$ est injective et surjective

donc bijective, et donc $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(\tilde{f}(E)) = \mathrm{Card}(E)$.
Réciproquement, si f n'est pas injective, alors $\exists x\neq y$ tq $f(x)=f(y)$, et donc $\mathrm{Card}(f(E)) < \mathrm{Card}(E)$.
Par contraposée, on peut donc conclure que f est injective ssi $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(f(E))$.

2. Si f est surjective, alors $f(E)=F$, et donc $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(F)$
Réciproquement, si $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(F)$, alors, comme $f(E)\subset F$,

on en déduit que $f(E) = F$, et par conséquent, f est surjective.

$\boxed{\text{Ex 15}}$: E un ensemble à $n \geq 2$ éléments.

$$f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$$

1. Soit $x \in E$. $x \in f(x)$, donc $f(x) \neq \emptyset$, $\mathrm{Card}(f(x)) \geq 1$.

2. Supposons que $\exists\, a \in E$ tq $\mathrm{Card}(f(a)) = n$.

$$f(a) \subset E \text{ et } \mathrm{Card}(E) = n \Rightarrow f(a) = E.$$

Par conséquent, $\forall x \in E$, $x \in f(a)$, et donc $a \in f(x)$.

En particulier, $\forall x \neq a$, $\{x, a\} \subset f(x)$, donc $\mathrm{Card}(f(x)) \geq 2$

Comme de plus $\mathrm{Card}(f(a)) = n \geq 2$, on en déduit que

$$\forall x \in E, \quad \mathrm{Card}(f(x)) \geq 2.$$

3. On considère

$$g : E \longmapsto [\![1;n]\!]$$
$$x \longmapsto \mathrm{Card}(f(x))$$

1er cas : Si $\exists\, a$ tq $\mathrm{Card}(f(a)) = n$, alors $g(E) \subset [\![2;n]\!]$, donc g n'est pas injective et $\exists\, x \neq y$ tq $g(x) = g(y)$.

2e cas : Si $\nexists$ pas a tq $\mathrm{Card}(f(a)) = n$, alors $g(E) \subset [\![1;n-1]\!]$, donc g n'est pas non plus injective.

Dans les deux cas, on en déduit qu'il $\exists\, x \neq y$ tq $\mathrm{Card}(f(x)) = \mathrm{Card}(f(y))$.

$\boxed{\text{Ex 16}}$: $\mathrm{Card}(E) = n$

1. Soit $B \subset E$. $\mathrm{Card}(\{A \subset B\}) = 2^{\mathrm{Card}(B)}$, donc

$$\mathrm{Card}(\{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \subset B\}) = \sum_{B \subset E} 2^{\mathrm{Card}(B)}$$

Or, $\mathrm{Card}(\{B \subset \mathcal{P}(E),\ \mathrm{Card}(B) = k\}) = \binom{n}{k}$

et donc

$$\mathrm{Card}(\{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \subset B\}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

2. Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$A \subset B \equiv \forall x \in E, \quad x \in A \Rightarrow x \in B$$
$$\equiv \forall x \in E, \quad x \notin A \text{ ou } x \in B$$
$$\equiv \forall x \in E, \quad x \in A^c \cup B$$

3. $\mathrm{Card}\,\{(A,B)\in \mathcal{P}(E)^2,\ A\cup B = E\} = \mathrm{Card}\,\{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2,\ A^c\subset B\}$

$= 3^n$

$\boxed{\text{Ex 17}}$:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x^2+2x+1)(x-1)$ $\quad g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \mapsto (x+1)(x^2-1)$

$x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x) = (x+1)^2(x-1)$, $g(x) = (x+1)^2(x-1)$, donc ces fonctions sont égales.

2. $f(0)=0$, $g(0)=1$, ces fonctions sont $\neq$

3. $f\neq g$, pas le même ensemble d'arrivée.

4. f et g coïncident sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, mais $f\neq g$.

5. $x\in\mathbb{R}$, $|x-2| < \frac{1}{2}|x+3| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ll} x-2 < \frac{1}{2}(x+3) & \text{et } x\geq 2 \\ \text{ou} & \\ 2-x < \frac{1}{2}(x+3) & \text{et } x\in[-3;2] \\ \text{ou} & \\ 2-x < -\frac{1}{2}(x+3) & \text{et } x\leq -3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{ll} x<7 & \text{et } x\geq 2 \\ x>\frac{1}{3} & \text{et } x\geq -3 \\ x>7 & \text{et } x\leq -3\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x\in\,]\tfrac{1}{3};7[$

donc $f=g$.

6. $f\neq g$.

$\boxed{\text{Ex 18}}$:

a) $\tan(\{0\}) = \{0\}$

b) $\sin^{-1}(\{2\}) = \emptyset$

c) $\cos^{-1}([0,1]) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi]$

d) $\left(\cos_{|[3,7]}\right)^{-1}([0,1]) = [\frac{3\pi}{2};7]$

e) $\left(\cos_{|[0,\pi]}\right)^{-1}([0,1]) = [0;\frac{\pi}{2}]$

f) $\sqrt{\cdot}([0,1]) = [0,1]$

g) $(x\mapsto x^2)^{-1}([0,1]) = [-1;1]$

h) $\left(\begin{array}{c} x\mapsto x^2 \\ [-\frac{1}{2};\frac{4}{3}]\to\mathbb{R}\end{array}\right)^{-1}([0,1]) = [-\frac{1}{2};1]$

i) $\left(\begin{array}{c} x\mapsto x^2 \\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\end{array}\right)^{-1}([0,1]) = [0,1]$

j) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $(x,y,z)\mapsto y$ $\quad f^{-1}([-1;1[\cup\{2\}) = \mathbb{R}\times([-1;1[\cup\{2\})\times\mathbb{R}$

$f([0,1]^3) = [0,1]$.

k) $|\cdot|([-2;-1]\cup[2,4]) = [1;4]$

l) $\left(|\cdot|_{|[-8,7]}\right)^{-1}([2,3]) = [-3;-2]\cup[2;3]$

m) $|\cdot|^{-1}(\{1\}) = \{-1;1\}$

n) $\exp(]-\infty;2]) =]0;e^2]$

o) $\exp^{-1}([-1;e]) =]-\infty;1]$

p) $\ln(\mathbb{R}_-)$ pas défini

q) $\ln^{-1}([3;+\infty[) = [e^3,+\infty[$.

$\boxed{\text{Ex 19}}$: $f : E \longrightarrow F$

1. Soient $A, B \subset E$. * $A \subset A \cup B$, donc $f(A) \subset f(A \cup B)$

De la même manière, $f(B) \subset f(A \cup B)$, et donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

* Réciproquement, soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tq $f(x) = y$. Si $x \in A$, alors $f(x) = y \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$

Si $x \in B$, alors $y \in f(B) \subset f(A) \cup f(B)$

Ainsi, $y \in f(A) \cup f(B)$, et donc $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

d'où finalement $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

* $A \cap B \subset A$, donc $f(A \cap B) \subset f(A)$
  $A \cap B \subset B$, donc $f(A \cap B) \subset f(B)$ $\Big\} \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

2. On a, en général, pas d'égalité dans l'inclusion précédente. Par exemple, $f : \{0,1\} \to \{0\}$, $k \longmapsto 0$, $A = \{0\}$, $B = \{1\}$,

$f(A \cap B) = \emptyset$

$f(A) \cap f(B) = \{0\}$.

3. Soient $A, B \subset F$.

* Comme dans 1., on a facilement : $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$
$\Rightarrow f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$
et $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B \Rightarrow f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

* Réciproquement, $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B$

$\Leftrightarrow f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

donc $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

* $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B$

$\Leftrightarrow f(x) \in A$ et $f(x) \in B$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

donc $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

$\boxed{\text{Ex 20}}$:

a) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos(x)$ n'est ni injective $(\cos(0) = \cos(2\pi))$
ni surjective $(\cos^{-1}(\{2\}) = \emptyset)$

b) $[\pi ; 2\pi] \longrightarrow [-1 ; 1]$, $x \longmapsto \sin(x)$ n'est ni injective $(\sin(\pi) = \sin(2\pi))$
ni surjective $(x \in [\pi ; 2\pi] \Rightarrow \sin(x) \leq 0)$

c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$ on peut montrer que f est injective et surjective, ou alors montrer que $f \circ f = 2 id_{\mathbb{R}}$

$f \circ f$ est bijective $\Rightarrow$ f est injective et surjective $\Rightarrow$ f est bijective

De plus, on en déduit que $f^{-1} = \frac{1}{2} f$.

d) $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$ est clairement injective, mais pas surjective.

e) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$f(1) = f(0) = 0$, donc f n'est pas injective.
$f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$, donc f est surjective.

f) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x^2$ est bijective, et $\mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}_-^*$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ aussi, donc f est bijective.

g) $f : \{0,1,2\} \longrightarrow \{-1,0,1\}$, $x \longmapsto -(x-1)$ est bijective $(f(0) = 1,\ f(1) = 0,\ f(2) = -1)$

h) $\varphi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto f(0)$ est surjective (si $c \in \mathbb{R}$, on considère $\tilde{c}$ la fonction constante égale à c, et alors $\varphi(\tilde{c}) = c$)

mais pas injective $(\varphi(id_{\mathbb{R}}) = \varphi(\tilde{0}) = 0)$

i) $\{0,1,2,3\} \longrightarrow \{1,7,9,11\}$ est bijective.

$$\begin{aligned} 0 &\longmapsto 1 \\ 1 &\longmapsto 11 \\ 2 &\longmapsto 7 \\ 3 &\longmapsto 9 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ex 21}}$: $f : I \longrightarrow J$, $x \longmapsto x^2$

1. $I = \{0\}$, $J = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f est injective, pas surjective
2. $I = \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}_+$ $\Rightarrow$ f est surjective, pas injective
3. $I = \{0\}$, $J = \{0\}$ $\Rightarrow$ f est bijective.

$\boxed{\text{Ex 22}}$: $\left.\begin{matrix} h \circ g \circ f \\ g \circ f \circ h \end{matrix}\right\}$ injectives $\Rightarrow$ f et h sont injectives

$f \circ g \circ h$ surjective $\Rightarrow$ f est surjective

$\Rightarrow$ f est bijective

$\Rightarrow h \circ g \circ f \circ f^{-1} = h \circ g$ est encore injective,

et $f^{-1} \circ f \circ h \circ g = h \circ g$ est encore surjective

$\Rightarrow h \circ g$ est bijective $\Rightarrow h$ est surjective $\Rightarrow h$ est bijective

$\Rightarrow h^{-1} \circ h \circ g = g$ est bijective.

Conclusion : f, g et h sont injectives.

$\boxed{\text{Ex } 23}$: $f : E \to \mathcal{P}(E)$.

On considère $A = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$

$A \subset E$. Supposons qu'il existe $x \in E$ tq $f(x) = A$.

Si $x \in A$, alors $x \notin f(x)$, donc $x \notin A$, c'est absurde.

si $x \notin A$, alors $x \in f(x)$, et donc $x \in A$, ce qui est aussi absurde.

Conclusion : $f^{-1}(A) = \emptyset$, et donc f n'est pas surjective.

$\boxed{\text{Ex } 24}$: $f : E \longrightarrow F$

1. Par définition, $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$,

donc $f(f^{-1}(B)) \subset B \cap f(E)$

Réciproquement, si $y \in B \cap f(E)$, alors $\exists\ x \in E$ tq $y = f(x)$

mais donc $f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B)$

et donc $y \in f(f^{-1}(B))$.

Conclusion : $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

2. f est surjective $\Rightarrow f(E) = F$, et donc $\forall\ B \subset F$,

$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E) = B$.

3. $x \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x) \in f(A)$, donc $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$
$\Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$

d'où $A \subset f^{-1}(f(A))$

4. Si on établit que $f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A$, alors

$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(A))$.

Supposons que f est injective, et soit $x \in E$ tq $f(x) \in f(A)$.

Alors, $\exists y \in A$ tq $f(x)=f(y)$, et donc $x=y$, et $x \in A$.
Le résultat est donc démontré, $\forall A \in \mathcal{P}(E)$,

$$f^{-1}(f(A)) = A.$$

$\boxed{\text{Ex } 25}$: a) $n \equiv m$ ssi $4 \mid m-n$:

* réflexivité : $n \in \mathbb{Z}$, $4 \mid n-n$, donc $n \equiv n$
* symétrie : $n,m \in \mathbb{Z}$, $4 \mid n-m \Rightarrow 4 \mid m-n$
  $n \equiv m \Rightarrow m \equiv n$.
* transitivité : $n,m,p \in \mathbb{Z}$, $4 \mid n-m$ et $4 \mid m-p$
  $\Rightarrow 4 \mid (n-m)+(m-p) = n-p$, donc $n \equiv p$.

Conclusion : $\equiv$ est une relation d'équivalence.

b) R est réflexive et symétrique, mais pas transitive : par exemple,
si $f : x \mapsto x$, $g : x \mapsto 0$, $h : x \mapsto x+1$,
$f(0)=g(0)$ donc fRg, $g(-1)=h(-1)$ donc gRh,
mais $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < h(x)$.

c) $f \sim g$ ssi $\exists h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = hg$, $h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$.
* réflexif et transitif mais
* pas symétrique (par ex : $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $\mathbb{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto$
$H \sim \mathbb{1}$ mais $\mathbb{1} \not\sim H$)

ni antisymétrique

d) Soient A, B, C trois ensembles dans E.
* $A \prec A$ car $id_A : A \to A$, $x \mapsto x$ est injective
* $A \prec B$ et $B \prec A \Rightarrow$ il existe $f : A \to B$ et $g : B \to A$ injectives
  on ne peut rien conclure.
  pas antisym, par ex, si $x, y \in E$, $x \neq y$, $\{x\}$ et $\{y\}$ sont en bijection, mais $\{x\} \neq \{y\}$.
  pas symétrique non plus
* transitif : OK.

e) $A \bowtie B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$: pas réflexif.

f) $f : E \to F$, $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

Réflexif, symétrique et transitif, donc $\sim$ est une relation d'équivalence.

g) $\ll$ réflexive et transitive.

Pour $x \in E$, on définit $C_x = \{y \in E,\ y \ll x \text{ et } x \ll y\}$,

et on considère $X = \{C_x,\ x \in E\}$, qu'on munit de $⋘$:

$A ⋘ B$ ssi $\exists a \in A$ et $b \in B$ tq $a \ll b$.

* Pour tout $x \in E$, $x \in C_x$, donc $C_x \neq \emptyset$.
* Soient x, y des éléments de E. Alors, soit $C_x = C_y$, soit $C_x \cap C_y = \emptyset$

En effet, si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, alors il existe $z \in E$ tq

$$x \ll z,\quad z \ll x,\quad y \ll z,\quad z \ll y.$$

Par transitivité, $x \ll y$ et $y \ll x$, et donc, toujours par transitivité,

$\forall t \in E$, $(t \in C_x) \Leftrightarrow (x \ll t \text{ et } t \ll x) \Leftrightarrow (y \ll t \text{ et } t \ll y) \Leftrightarrow (t \in C_y)$

donc $C_x = C_y$.

* Réflexivité : Soit $C_x \in X$. $x \ll x$, donc $C_x ⋘ C_x$.
* Soit $x \in E$ et $x_1 \in C_x$. Alors, pour tout $t \in E$, on a :

$$(t \ll x_1) \Leftrightarrow (t \ll x) \text{ et } (x_1 \ll t) \Leftrightarrow (x \ll t),$$

c'est une conséquence de la transitivité de $\ll$.

* Transitivité : Soient $C_x, C_y, C_z \in X$, tq $C_x ⋘ C_y$ et $C_y ⋘ C_z$

Alors $\exists (x_1, y_1) \in C_x \times C_y$ et $(y_2, z_2) \in C_y \times C_z$ tq

$$x_1 \ll y_1 \text{ et } y_2 \ll z_2 \Rightarrow x_1 \ll y \text{ et } y \ll z_2$$
$$\Rightarrow x_1 \ll z_2$$

donc $C_x ⋘ C_z$

* Antisymétrie : Soient $C_x, C_y \in X$ tq $C_x \ll C_y$ et $C_y \ll C_x$.

Alors $\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C_x \times C_y$ tq

$$\begin{cases} x_1 \ll y_1 \\ y_2 \ll x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \ll y \\ y \ll x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ll y \\ y \ll x \end{cases}$$

donc $y \in C_x$, donc $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, et finalement, $C_x = C_y$.

* Conclusion : $⋘$ est une relation d'ordre.

Ex 26 :

1. (a) $E=\{a,b,c,d\}$, $A=\{a,b,c\}$, $B=\{c,d\}$

$\mathbb{1}_E : a\mapsto 1,\ b\mapsto 1,\ c\mapsto 1,\ d\mapsto 1$

$\mathbb{1}_\emptyset : x\in E\mapsto 0$

$\mathbb{1}_A : a\mapsto 1,\ b\mapsto 1,\ c\mapsto 1,\ d\mapsto 0$

$\mathbb{1}_{\overline{A}} : a\mapsto 0,\ b\mapsto 0,\ c\mapsto 0,\ d\mapsto 1$

$\mathbb{1}_B : a\mapsto 0,\ b\mapsto 0,\ c\mapsto 1,\ d\mapsto 1$

$\mathbb{1}_{A\cap B}=\mathbb{1}_{\{c\}} : a,b,d\mapsto 0,\ c\mapsto 1$ $\qquad \mathbb{1}_{A\cup B}=\mathbb{1}_E$.

(b) $A\subset\mathbb{R}$,

$\mathbb{1}_A(A)=\{1\}$, si $A\neq\emptyset$; $\mathbb{1}_A(\overline{A})=\{0\}$, $\mathbb{1}_A(\mathbb{R})=\{0,1\}$ si $A\neq\mathbb{R}$

$\mathbb{1}_A(A)=\emptyset$ si $A=\emptyset$; $\mathbb{1}_A(\overline{A})=\emptyset$, $\mathbb{1}_A(\mathbb{R})=\{1\}$ si $A=\mathbb{R}$

$\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\})=A$, $\mathbb{1}_A^{-1}(\{0\})=\overline{A}$, $\mathbb{1}_A^{-1}(\{0,1\})=\mathbb{R}$.

2. (a) Soit $x\in E$. $\mathbb{1}_A(x)\in\{0,1\}$, donc $(\mathbb{1}_A(x))^2=\mathbb{1}_A(x)$, d'où $(\mathbb{1}_A)^2=\mathbb{1}_A$.

(b) $A\subset B \iff (x\in A\Rightarrow x\in B)\iff(\mathbb{1}_A(x)=1\Rightarrow \mathbb{1}_B(x)=1)$
$\iff(\mathbb{1}_A(x)\leq\mathbb{1}_B(x))\iff \mathbb{1}_A\leq\mathbb{1}_B$

$(A=B)\iff(\mathbb{1}_A\leq\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_B\leq\mathbb{1}_A)\iff(\mathbb{1}_A=\mathbb{1}_B)$

(c) $\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_{\overline{A}}=\mathbb{1}_E=1$, donc $\mathbb{1}_{\overline{A}}=1-\mathbb{1}_A$.

$\mathbb{1}_{A\cap B}=\min(\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B)$, $\mathbb{1}_{A\cup B}=\max(\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B)$, c'est clair.

Si $x,y\in\{0,1\}$, alors $\max(x,y)=x+y-xy$ et $\min(x,y)=xy$

(d) $\mathbb{1}_A(x)=1\iff x\in A$, donc $\sum_{x\in E}\mathbb{1}_A(x)=\mathrm{Card}(A)$.

3. $|A\cup B\cup C|=|A\cup B|+|C|-|C\cap(A\cup B)|$
$=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|(C\cap A)\cup(C\cap B)|$
$=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|C\cap A|-|C\cap B|+|(A\cap C)\cap(B\cap C)|$
$=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|C\cap A|-|C\cap B|+|A\cap B\cap C|$.

~~4. E de cardinal n, $F=\{f:E\to\{0,1\}\}$. F est en bijection avec les sous-ensembles de E, donc $\mathrm{Card}(F)=\mathrm{Card}(P(E))=2^n$.~~

~~5. $\sum_{A,B\subset E}|A\cap B|=\sum_{B\subset E}$~~ $\sum_{A\subset E}|A\cap B|$.

4. (a) $\mathrm{Card}\left(\{0,1\}^E\right) = 2^{\mathrm{Card}(E)} = 2^n$

(b) $\phi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow F$
$\quad A \longmapsto \mathbb{1}_A$

* $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$, donc ϕ est injective.
* Soit $f \in F$. On pose $A = f^{-1}(\{1\})$, et on vérifie sans difficulté que $\mathbb{1}_A = f$. Par conséquent, ϕ est surjective.
* Finalement, ϕ est bijective.

(c) $\mathcal{P}(E)$ est en bijection avec F, c'est donc un ensemble fini et $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \mathrm{Card}(F) = 2^n$.

5. ~~Soit $B \subset E$, $\mathrm{Card}(B) = k \in [\![0,n]\!]$.~~

* $$\sum_{A,B\subset E} |A\cap B| = \sum_{x\in E}\sum_{A,B\subset E} \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \sum_{x\in E}\sum_{A,B\subset E} \mathbb{1}_A(x)\,\mathbb{1}_B(x)$$
$$= \sum_{x\in E}\left(\sum_{A\subset E}\mathbb{1}_A(x)\right)\left(\sum_{B\subset E}\mathbb{1}_B(x)\right)$$
$$= \sum_{x\in E}\left(\sum_{A\subset E}\mathbb{1}_A(x)\right)^2$$

Soit $x \in E$. Alors $\displaystyle\sum_{A\subset E}\mathbb{1}_A(x) = \mathrm{Card}\{A\subset E,\ x\in A\}$
$$= \mathrm{Card}\{A' \subset E\setminus\{x\}\}$$
$$= 2^{n-1}$$

et donc $\displaystyle\sum_{A,B\subset E} |A\cap B| = n\, 2^{2(n-1)}$.

* $$\sum_{A,B\subset E} |A\cup B| = \sum_{A,B\subset E} |A| + |B| - |A\cap B| = 2\left(\sum_{A,B\subset E} |A|\right) - n\,2^{2(n-1)}$$

Or, $\displaystyle\sum_{A,B\subset E} |A| = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(E))\sum_{A\subset E}|A| = 2^n \sum_{x\in E}\sum_{A\subset E}\mathbb{1}_A(x)$
$$= 2^n \sum_{x\in E} 2^{n-1} = n\,2^{2n-1}$$

Finalement,
$$\sum_{A,B\subset E} |A\cup B| = n\,2^{2n} - n\,2^{2(n-1)}$$
$$= 3n\,2^{2(n-1)}.$$