$\boxed{TD\ 6}$

$\boxed{Ex\ 1}$: a) $[0,1[$ non vide + borné $\Rightarrow \exists$ borne inf et borne sup.

$\sup([0,1[) = 1$, $1 \notin [0,1[$ donc ce n'est pas un max.
$\inf([0,1[) = 0 \in [0,1[$, c'est le minimum.

b) $B = \{(-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|(-1)^n + \frac{1}{n}\right| \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2$,
donc B est borné et non vide $\Rightarrow \exists$ borne inf/sup.

$$\left.\begin{array}{l} * \quad n \geq 2 \Rightarrow (-1)^n + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ \quad\ n = 1 \Rightarrow (-1)^1 + \frac{1}{1} = 0 \leq \frac{3}{2} \end{array}\right\} \sup(B) \leq \frac{3}{2}.$$

Comme de plus $\frac{3}{2} \in B$, on en déduit que
$\max(B) = \sup(B) = \frac{3}{2}$.

* $(-1)^n + \frac{1}{n} \geq -1 + \frac{1}{n} > -1$, donc $\inf(B) \geq -1$.

De plus, $(-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$, donc $\inf(B) \leq -1$

Par conséquent, $\inf(B) = -1$. $-1 \notin B$, ce n'est pas un minimum

c) $C = \left\{\frac{m}{nm+1},\ (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*\right\}$

Soit $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. $0 \leq \frac{m}{nm+1}$, et de plus $nm+1 \geq m+1 > m$
donc $\frac{m}{nm+1} < 1$

donc C borné non vide $\Rightarrow \exists$ borne inf/sup.
et $\sup(C) \leq 1$, $\inf(C) \geq 0$.

* $0 \in C$, donc $\inf(C) = \min(C) = 0$.

* $\frac{m}{m+1} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 1$, donc $\sup(C) \geq 1$, d'où $\sup(C) = 1$. Ce n'est pas un maximum.

d) $[0,\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} = D$. D est borné et non vide $\Rightarrow \exists$ borne inf/sup,
et $0 \leq \inf(D)$, $\sup(D) \leq \sqrt{2}$.

$0 \in D$ donc $\inf(D) = \min(D) = 0$.

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\left| \begin{array}{l} 0 \leq x_n \leq \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{2} \end{array} \right.$$

Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D^{\mathbb{N}}$, et donc $\sup(D) \geq \sqrt{2} \Rightarrow \sup(D) = \sqrt{2}$.

Ce n'est pas un maximum

$\boxed{\text{Ex 2}}$: $A, B \subset \mathbb{R}$ non vides.

1. $-A = \{-a,\ a \in A\}$.

a) $\inf(A)$ existe $\Leftrightarrow$ A est minoré $\Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in A,\ m \leq x$

$\Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in A,\ -x \leq -m$

$\Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in -A,\ x \leq -m$

$\Leftrightarrow -A$ est majoré $\Leftrightarrow \sup(-A)$ existe

Si $\inf(A)$ existe, alors

$$\inf(A) = \alpha \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in A \text{ tq } \alpha \leq x \leq \alpha + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in A \text{ tq } -\alpha - \varepsilon \leq -x \leq -\alpha$$

$$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in -A \text{ tq } -\alpha - \varepsilon \leq x \leq -\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sup(-A) = -\alpha.$$

et donc $\inf(A) = -\sup(-A)$.

b) On applique le raisonnement précédent à $\tilde{A} = -A$. Alors, comme $-(-A) = A$, $\inf(-A)$ existe $\Leftrightarrow \sup(-(-A)) = \sup(A)$ existe, et

$$\sup(-(-A)) = \sup(A) = -\inf(-A).$$

2. $B \subset A$

a) A majoré $\Rightarrow$ B majoré, donc $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent

$\sup(A)$ est un majorant de A, donc de B, donc $\sup(B) \leq \sup(A)$.

b) Même raisonnement.

3. $A + B = \{a+b,\ a \in A,\ b \in B\}$ est non vide.

Si A et B sont majorés, alors on voit facilement que $A+B$ l'est, et donc $\sup(A+B)$ existe.

Réciproquement, si $\sup(A+B)$ existe, alors $A+B$ est majoré. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tq $\forall\, x \in A+B,\ x \leq M$.

Par conséquent, soit $a \in A$, alors $\forall\, b \in B,\ a+b \leq M$

$\Rightarrow b \leq M - a \Rightarrow B$ est majoré

et soit $b \in B$, alors $\forall\, a \in A,\ a+b \leq M$

$\Rightarrow a \leq M - b \Rightarrow A$ est majoré.

Ainsi : $\sup(A+B)$ existe $\Leftrightarrow$ ($\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent).

Si $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent, alors $\forall (a,b) \in A\times B$, $a+b \leq \sup(A)+\sup(B)$

donc $\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

Réciproquement, $a+b \leq \sup(A+B) \quad \forall (a,b) \in A \times B$

$$\Rightarrow \quad a \leq \sup(A+B) - b \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

$$\Rightarrow \quad \sup(A) \leq \sup(A+B) - b \quad \forall b \in B$$

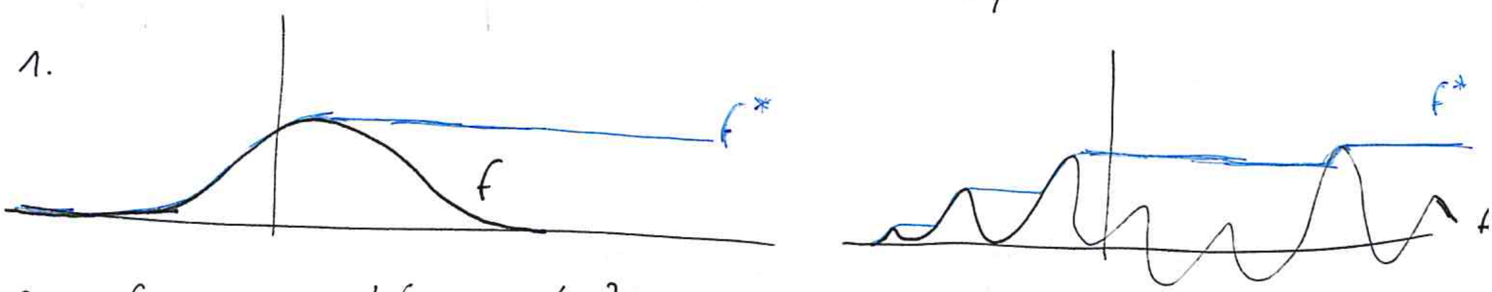
$$\Rightarrow \quad b \leq \sup(A+B) - \sup(A) \quad \forall b \in B$$

$$\Rightarrow \quad \sup(B) \leq \sup(A+B) - \sup(A)$$

d'où l'égalité : $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

$\boxed{\text{Ex 3}}$: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ majorée, $f^*(y) = \sup\limits_{x \leq y} f(x)$.

1.



2. $f^*(y) = \sup\{f(x), x \leq y\}$, donc en particulier, $f^*(y) \geq f(y)$.

Si f est croissante, alors $f(y) \geq f(x) \quad \forall x \leq y$, donc

$\sup\{f(x), x \leq y\} \leq f(y)$, d'où l'égalité :

$$f \text{ croissante} \Rightarrow f^* = f.$$

3. Soit $y_1 \leq y_2$. $\{f(x), x \leq y_1\} \subset \{f(x) \leq y_2\}$

donc $\sup(\ " \ ) \leq \sup(\ " \ )$

ou, autrement, $f^*(y_1) \leq f^*(y_2)$, donc f^* est croissante.

$\boxed{\text{Ex 4}}$: $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ croissante. $T = \{x \in [0,1], f(x) \leq x\}$.

1. $f(1) \leq 1$, donc $1 \in T$. De plus, 0 minore T, donc T possède une borne inf. Soit $t = \inf(T)$.

Par définition, $\forall x \in T$, $t \leq x$, et donc $f(t) \leq f(x) \leq x$ car f est croissante. Ainsi, $f(t)$ minore T, donc $f(t) \leq t$ et $t \in T$.

Soit $x \in T$. Alors $f(x) \leq x$, donc $f(f(x)) \leq f(x)$

et donc $f(x) \in T$.

Par conséquent, $f(T) \subset T$

Comme $t \in T$, on en déduit que $f(t) \in T$, et donc que $t \leq f(t)$. Or, $t \geq f(t)$, donc $f(t) = t$.

2. Si on suppose que $f : [0,1[\to [0,1[$ est croissante, alors on n'a plus $1 \in T$. En particulier, il se peut que T soit vide, et alors le raisonnement ne fonctionne plus. Par exemple, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}(1+x)$ n'admet pas de point fixe.

$\boxed{\text{Ex 5}}$: Soient $x < y$ des réels.

$y - x > 0$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $2^n(y-x) > 1$.

mais alors il existe $m \in [2^n x, 2^n y] \cap \mathbb{Z}$

$$2^n x \leq m \leq 2^n y$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{m}{2^n} \leq y.$$

Conclusion : $\left\{ \frac{m}{2^n},\ (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Ex 6}}$: 1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

Si (u_n) est stationnaire, alors $\exists N$ tq $n \geq N \Rightarrow u_n = u_N$, et donc (u_n) converge vers u_N.

Réciproquement, si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \frac{1}{2}$. En particulier, $n \geq N$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - u_n| = |u_{n+1} - l - (u_n - l)| \leq \underbrace{|u_{n+1} - l| + |u_n - l|}_{<1}$$

et comme (u_n) est à valeurs entières, $u_{n+1} = u_n$. Par conséquent, (u_n) est stationnaire (et $l = u_N$).

2. Soit $D \subset \mathbb{Z}$ non vide et majoré $\Rightarrow$ D admet une borne sup

$\Rightarrow \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup(D)$

D'après la question précédente, (u_n) est stationnaire, et $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant N$, $u_n = u_N$. En particulier, $\sup(D) = u_N \in D$, donc D possède un maximum.

$\boxed{\text{Ex 7}}$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l > 0$

Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_0 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{l}{2}$

En particulier, $n \geqslant N_0 \Rightarrow u_n - l > -\frac{l}{2}$

$\Rightarrow u_n > \frac{l}{2}$.

$\boxed{\text{Ex 8}}$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \in \mathbb{R}$.

1. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

Par conséquent, si $n \in \mathbb{N}$, $|u_n v_n| = |u_n||v_n| \leqslant M|v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. Si on ne suppose pas (u_n) bornée, alors tout peut arriver.

Par exemple, $\left.\begin{array}{l} u_n = n \\ v_n = \frac{1}{n^2} \end{array}\right\}$ $u_n v_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

mais $\left.\begin{array}{l} u_n = n^2 \\ v_n = \frac{1}{n} \end{array}\right\}$ $u_n v_n = n \longrightarrow +\infty$.

$\boxed{\text{Ex 9}}$: (u_n), (v_n) convergentes.

1. Supposons que $x \leqslant y$. Alors $\left.\begin{array}{l} \max(x,y) = y \\ \min(x,y) = x \end{array}\right\}$ $\max(x,y) + \min(x,y) = x+y$

et $\max(x,y) - \min(x,y) = y - x = |y-x|$.

Si $x \geqslant y$, on a aussi : $\max(x,y) + \min(x,y) = x+y$
$\max(x,y) - \min(x,y) = x-y = |y-x|$

En particulier, $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$

Par conséquent, la suite $(\max(u_n, v_n)) = \left(\frac{1}{2}(u_n + v_n + |u_n - v_n|)\right)$ est convergente.

2. Quitte à intervertir (u_n) et (v_n), on peut supposer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \geq \lim_{n\to+\infty} v_n .$$

<u>1er cas</u> : si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = l$, alors, si $\varepsilon > 0$, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tq

$$n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$
$$n \geq n_2 \Rightarrow |v_n - l| \leq \varepsilon$$

~~ainsi,~~ ~~et~~ donc, si $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$,

$$|\max(u_n, v_n) - l| \in \{ |u_n - l|, |v_n - l| \}$$

donc $|\max(u_n, v_n) - l| < \varepsilon$.

Par conséquent, $(\max(u_n, v_n))$ converge vers l.

<u>2e cas</u> : si $\lim_{n\to+\infty} u_n > \lim_{n\to+\infty} v_n$, alors, d'après l'ex 7, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N_0 \Rightarrow u_n - v_n \geq \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n)\right) > 0$

en particulier, $u_n - v_n \geq 0$, et donc $\max(u_n, v_n) =$

On en déduit que $(\max(u_n, v_n))$ converge, et que

$$\lim_{n\to+\infty} \max(u_n, v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n .$$

$\boxed{\text{Ex 10}}$:

a) $u_n = \frac{n}{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

b) $u_n = \left(n + \frac{2}{n^2}\right)^3 - n^3 = n^3\left(\left(1 + \frac{2}{n^3}\right)^3 - 1\right) = n^3\left(1 + \frac{6}{n^3} + \frac{12}{n^6} + \frac{8}{n^9} - 1\right)$

$= 6 + \frac{12}{n^3} + \frac{8}{n^6} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 6$

c) $u_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)\left(n - \frac{1}{n}\right) - n^2 = n^2 - \frac{1}{n^2} - n^2 = -\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d) $u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} = \frac{n^2+n-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

e) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, $|u_n| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

f) $u_n = \frac{2n^6 + 5n + 1}{n^6 - 2} = \frac{2 + 5\frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^6}}{1 - \frac{2}{n^6}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

g) $u_n = (-1)^n n$, $u_{2n} = 2n \longrightarrow +\infty$

$u_{2n+1} = -(2n+1) \longrightarrow -\infty$

donc (u_n) diverge.

h) $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} = -\dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = -\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

i) $u_n = \sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$, or $\frac{1}{n}\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par les croissances comparées,

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

j) $u_n = 2 + \dfrac{\sin(n) - 4}{n^2}$, $\left|\dfrac{\sin(n)-4}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{4}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

k) $u_n = n^{\frac{1}{\ln(n)}} = e^{\frac{\ln(n)}{\ln(n)}} = e$, (u_n) est constante, et en particulier $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$

l) $u_n = \dfrac{(-5)^n + n}{3^n - 1}$ ~~= ...~~ $\qquad n5^{-n} = ne^{-n\ln(5)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$= \dfrac{5^n}{3^n} \dfrac{(-1)^n + n5^{-n}}{1 - 3^{-n}}$ $\qquad 1 - 3^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

et $\left(\frac{5}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

donc $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, (u_n) diverge.
$u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

m) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$: ~~...~~ $= \dfrac{1\times 2 \times \dots \times n}{n \times n \times n \dots \times n} \leq \dfrac{1}{n}$. Comme $u_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$\boxed{\text{Ex 11}}$: ~~...~~ $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}$

Il est clair que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+k/n^2}} \leq 1$, donc $u_n \leq 1$.

Or, on montre que $\forall x \geq 0$, ~~$\sqrt{1+x} \geq 1 + \dots$ avec une étude de fonction, et donc~~

$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 1 - \dfrac{1}{2}x$ avec une étude de fonctions :

~~[illegible]~~ Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 + \frac{1}{2}x$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$x \in \mathbb{R}_+ \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^3 + \frac{1}{2} \geqslant 0$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geqslant f(0) = 0.$

en particulier, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+k/n^2}} \geqslant 1 - \dfrac{k}{2n^2}$

et donc $U_n \geqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{2n^2}\right) = 1 - \dfrac{n(n+1)}{4n^3}$

$$= 1 - \frac{n+1}{2n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

D'après le théorème des gendarmes, $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

$\boxed{\text{Ex 12}}$: 1. $U_{n^2} = \sqrt{n^2} - \lfloor \sqrt{n^2} \rfloor = n - n = 0$

$$U_{n^2+n} = \sqrt{n^2+n} - \lfloor \sqrt{n^2+n} \rfloor$$

or, $n^2+n < n^2+2n+1 = (n+1)^2$, et $n^2+n \geqslant n^2$, donc

$$\lfloor \sqrt{n^2+n} \rfloor = n$$

d'où $U_{n^2+n} = \sqrt{n^2+n} - n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$

$$= n\,\frac{1+\frac{1}{n} - 1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

2. (U_n) converge $\Rightarrow$ (U_{n^2}) et (U_{n^2+n}) convergent vers la même limite, donc par contraposée, on a déduit que (U_n) ne converge pas.

$\boxed{\text{Ex 13}}$: $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$, $V_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$, donc (U_n) est strictement croissante.

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leqslant 0$$

donc (v_n) est décroissante.

De plus, $v_n - u_n = \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.

2. On pose $e = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Supposons que $e \in \mathbb{Q}$. Il existe $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $e = \frac{p}{q}$, puisque $e \geq u_q = \cancel{1+\dots}\ 2 > 0$.

Comme (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et comme de plus (u_n) est strictement croissante et (v_n) est strictement décroissante à partir de $n=2$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n < e < v_n.$$

$q!\,u_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}^*$ puisque $\forall k \in [\![0;q]\!]$, $k! \mid q!$.

$q!\,v_q = q!\left(u_q + \frac{1}{q!}\right) = q!\,u_q + 1 \in \mathbb{N}^*$, donc $q!\,u_q = N$
$q!\,v_q = N+1$

et donc $q!\,u_q < eq! < q!\,v_q$

$$N < \underbrace{p(q-1)!}_{\in \mathbb{N}^*} < N+1$$

on arrive à une absurdité.

Conclusion : $e \notin \mathbb{Q}$.

$\boxed{\text{Ex 14}}$: 1. $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x)$

$f(0) = 0$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leq 0$

donc f est décroissante et $\forall x \geq 0$, $f(x) \leq f(0) = 0$.

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x)$.

De la même manière, on mq $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leq x$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Comme $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow e^{1-\frac{1}{2n}} \leq u_n \leq e^1$$

$\Rightarrow$ d'après le th. des gendarmes,

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^1 = e.$$

b) $v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

On vérifie facilement que $v_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\ln(v_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$, et donc

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{n^4}\right) \leq \ln(v_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

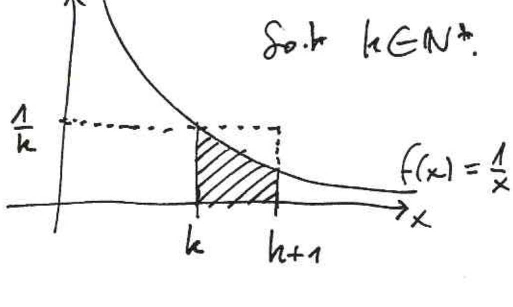
$$\underbrace{\frac{n(n+1)}{2n^2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \leq \ln(v_n) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

d'après le th. des gendarmes, $\ln(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{1/2}$.

$\boxed{\text{Ex 15}}$: $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1.



Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Aire hachurée $\leq$ Aire du rectangle

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq (k+1-k)\cdot\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{k}$$

2. On en déduit directement que $u_n \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$

$$= \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1)$$

Or $\ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc, par comparaison,

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

$\boxed{\text{Ex } 16}$: 1. $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$

On suppose que (u_n) converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

<u>1er cas</u> : $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tq $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.

Alors, si $n \geq N+1$,

$$|V_n - l| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} l\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - l)\right|$$

$$\leq \frac{1}{n}\underbrace{\left|\sum_{k=1}^{N}(u_k - l)\right|}_{=\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k - l|$$

$$\leq \frac{\alpha}{n} + \frac{n-N}{n}\varepsilon$$

$$\leq \frac{\alpha}{n} + \varepsilon$$

$\frac{\alpha}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc il existe N' tq $n \geq N' \Rightarrow \frac{\alpha}{n} < \varepsilon$.

Ainsi, si $n \geq \max(N, N')$, $|V_n - l| \leq 2\varepsilon$, et donc $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

<u>2e cas</u> : $l = +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tq $n \geq N \Rightarrow u_n \geq M$.

Alors, si $n \geq N+1$,

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} u_k$$

$$\geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} u_k + \frac{n-N}{n} M = \frac{\alpha}{n} + \frac{n-N}{n}\cdot M$$

$\frac{\alpha}{n} + \frac{n-N}{n} M \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$, donc $\exists N'$ tq $n \geq N' \Rightarrow \frac{\alpha}{n} + \frac{n-N}{n} M \geq \frac{M}{2}$

et donc, si $n \geq \max(N, N')$, $V_n \geq \frac{M}{2}$, donc $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

<u>3e cas</u> : $l = -\infty$: démonstration similaire au cas précédent. On peut aussi s'y ramener en posant $\tilde{u}_n = -u_n$.

2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

D'après 1, $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{n}(u_{n+1} - u_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

mais alors $\frac{U_n}{n} = \underbrace{\frac{u_1}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} V_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

En passant au log, on montre que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l) \in \overline{\mathbb{R}}$,

où on comprend $\left| \begin{array}{l} \ln(+\infty) = +\infty \\ \ln(0) = -\infty . \end{array}\right.$

D'après le lemme de Cesàro,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{n}\left(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l)$$

$$\text{donc } \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \ln\left((u_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}\right) - \underbrace{\frac{\ln(u_1)}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l)$$

et donc $\ln\left(u_n^{1/n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l)$, ou autrement dit,

$$\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

4. * $u_n = \binom{2n}{n}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!\,n!}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$

$$\text{donc } \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$$

* $u_n = \frac{n^n}{n!}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$

$$\text{donc } \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$$

$\boxed{\text{Ex 17}}$: $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a \neq 1$, $u^{(0)} \in \mathbb{R}$. $\left| \begin{array}{l} u_0 = u^{(0)} \\ u_{n+1} = a u_n + b \end{array}\right.$, $n\in\mathbb{N}$.

1. $\alpha = \frac{b}{1-a}$ résout l'équation $\alpha = a\alpha + b$.

2. Soit $v_n = u_n - \alpha$ pour $n\in\mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = a u_n + b - \alpha$$
$$= a u_n + b - (a\alpha + b)$$
$$= a(u_n - \alpha) = a\, v_n$$

donc (v_n) est une suite géométrique.

3. (v_n) géométrique de raison $a \Rightarrow v_n = a^n v_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$$\Rightarrow u_n - \alpha = a^n(u_0 - \alpha)$$
$$\Rightarrow u_n = a^n(u_0 - \alpha) + \alpha$$

4. Cas 1 : $|a| < 1$, alors $a^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, et donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$

Cas 2 : $|a| > 1$, alors (a^n) ne converge pas, et donc (u_n) converge si et seulement si $u_0 = \alpha$.

Cas 3 : $a = -1$, alors $\begin{cases} u_{2n} = u_0 \\ u_{2n+1} = 2\alpha - u_0 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

En particulier, (u_n) converge ssi $u_0 = \alpha$.

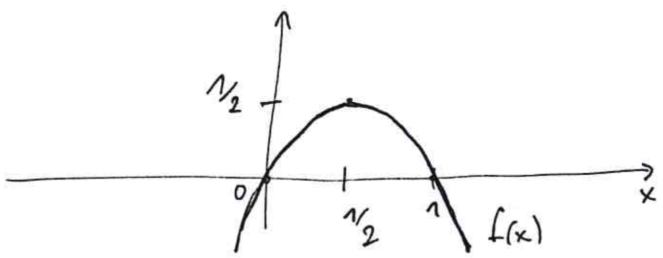
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(a^n(u_0 - \alpha) + \alpha\right) = n\alpha + (u_0 - \alpha)\sum_{k=0}^{n} a^n$$
$$= n\alpha + (u_0 - \alpha)\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$\boxed{\text{Ex } 18}$: $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n) \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x(1-x)$ $\qquad f'(x) = 2 - 4x$,

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$



2. $f(x) - x = x(1 - 2x)$, donc $f(x) - x \geq 0 \iff x \in [0 ; \frac{1}{2}]$

3. Supposons que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L \in \mathbb{R}$. Alors, par continuité,
$$f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(L)$$

Or, $f(u_n) = u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, et donc $f(l) = l$, et l est un point fixe de f.

$f(x) - x = 0 \iff x(1-2x) = 0$

$\iff x \in \{0, 1/2\}$, les points fixes de f sont 0 et $\frac{1}{2}$.

Si u_0 est un point fixe de f, alors $u_1 = f(u_0) = u_0$

$u_2 = f(u_1) = f(u_0) = u_0$

$\vdots$

on montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.

4. On a montré que ~~...~~ si $x < 0$, alors $f(x) < 0$ (question 1) et aussi que f est croissante sur $]-\infty ; \frac{1}{2}]$.

En particulier, $f(]-\infty;0[) \subset]-\infty;0[$

et f est croissante sur $]-\infty;0[$.

De la même manière, $x \in]0;1[\Rightarrow f(x) > 0$, et on a aussi vu que $\frac{1}{2}$ est ~~le~~ maximum de f. Ainsi

$f(]0;\frac{1}{2}[) \subset]0;\frac{1}{2}[$, et f est croissante sur $]0;\frac{1}{2}[$.

5.a) Si $u_0 \in]0;\frac{1}{2}[$, alors on montre par récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0;\frac{1}{2}[$ et $u_{n+1} \geqslant u_n$

* $u_1 = f(u_0)$, or, $f(u_0) - u_0 > 0$ puisque $u_0 \in]0;\frac{1}{2}[$ (question 2)

donc $u_1 > u_0$ et ~~...~~ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

* Supposons que $u_n \in]0;\frac{1}{2}[$ et que $u_{n+1} \geqslant u_n$

Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in]0;\frac{1}{2}[$, et comme f est croissante sur $]0;\frac{1}{2}[$, on en déduit que $f(u_{n+1}) = u_{n+2} \geqslant f(u_n) = u_{n+1}$,

donc l'hérédité est démontrée.

On en conclut que (u_n) est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0;\frac{1}{2}[$.

En particulier, (u_n) est croissante et majorée, donc convergente.

Elle converge vers un point fixe de f, et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.

~~b~~b) Si $u_0 < 0$, alors on répète l'étude de la question précédente.

On montre encore que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$, mais cette fois $f(v_0) - v_0 = v_1 - v_0 < 0$, et donc on montre, toujours par récurrence, que (v_n) est décroissante.

Comme (v_n) est décroissante, (v_n) converge si, et seulement si, elle est minorée. Or, si (v_n) converge, c'est vers un point fixe l de f, et $l = \lim_{n\to+\infty} v_n \leqslant v_0 < 0$: c'est impossible. On en déduit que (v_n) ne converge pas, donc n'est pas minorée, et donc diverge vers $-\infty$.

6. Si $v_0 \in]1/2;+\infty[$, alors $f(v_0) = v_1 \in]-\infty;\frac{1}{2}[$, donc on se ramène aux questions précédentes.

<u>1er cas</u> : $v_0 \in]1/2, 1[$, alors $f(v_0) \in]0;\frac{1}{2}[$, donc (v_n) est croissante à partir de $n=1$, et converge vers $\frac{1}{2}$.

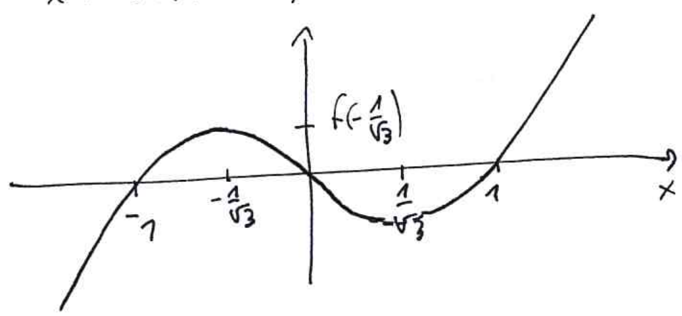
<u>2e cas</u> : $v_0 = 1$, alors $f(v_0) = 0$, et donc (v_n) est stationnaire à partir de $n=1$: $\forall n \geqslant 1,\ v_n = 0$.

<u>3e cas</u> : $v_0 > 1$, alors $f(v_0) < 0$, et donc (v_n) ~~diverge~~ vers $-\infty$.

$\boxed{\text{Ex } 19}$: $\begin{cases} u_{n+1} = u_n(u_n^2 - 1) & n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x(x^2-1)$ $\quad f'(x) = 3x^2 - 1$,

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	



$f(x) - x = x(x^2-2) = x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \geqslant 0 \iff x \in [-\sqrt{2};0] \cup [\sqrt{2};+\infty[$

Comme dans l'ex 18, si (u_n) converge, c'est vers un point fixe de f (par continuité). Cette fois, les points fixes sont 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

2. f est décroissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}]$, donc si $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}]$,

alors $f(x) \in \left[f(\frac{1}{\sqrt{3}}); f(-\frac{1}{\sqrt{3}})\right]$. Or, $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} > -\frac{1}{\sqrt{3}}$

et $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{2}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$

et donc ~~[illegible]~~ $[-\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}]$ est stable par f.

3. Supposons que $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}]$.

Sur cet intervalle, f^2 est croissante. En effet, comme f est décroissante, $\forall x, y \in [-\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}]$, $x \leq y$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(y)$$
$$\Rightarrow f^2(x) \leq f^2(y)$$

~~La suite (u_{2n}), définie par $u_{2n+2} = f^2(u_{2n})$~~

La suite $(v_n) = (u_{2n})$, définie par $\begin{cases} v_{n+1} = u_{2n+2} = f^2(u_{2n}) = f^2(v_n) \\ v_0 = u_0 \end{cases}$

est donc monotone.

De la même manière, $(w_n) = (u_{2n+1})$, $\begin{cases} w_{n+1} = f^2(w_n) \\ w_0 = u_1 \end{cases}$

est monotone. Pour déterminer le sens de leur monotonie, il suffit donc de comparer v_1 avec v_0, et w_1 avec w_0.

Or, si $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}]$, $x^2 \in [0 ; \frac{1}{3}]$ et donc

$$|f(x)| = |x| \, |x^2 - 1| \leq |x|$$

Par conséquent, $|v_1| = |f^2(v_0)| \leq |f(v_0)| \leq |v_0|$

et donc $u_0 \in]0 ; \frac{1}{\sqrt{3}}] \Rightarrow v_1 \leq v_0 = u_0$, (v_n) est décroissante.

Comme elle est de plus minorée, elle converge vers le seul point fixe de $f \in [-\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}]$, c'est-à-dire 0.

Si par contre $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0[$, alors (v_n) croît, et elle converge encore vers 0.

Pour (w_n), le raisonnement est le même, mais $w_0 = u_1 = f(u_0)$.

Or, on voit que $u_0 \in]0 ; \frac{1}{\sqrt{3}}] \Rightarrow u_1 < 0$

et $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}} ; 0[\Rightarrow u_1 > 0$,

donc si $u_0 \in]0 ; \frac{1}{\sqrt{3}}]$, (w_n) est croissante et converge vers 0.

si $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}} ; 0[$, (w_n) est décroissante et converge vers 0.

Si $u_0 = 0$, alors (u_n) est constante et nulle, il en va de même pour (v_n) et (w_n)

4. Si $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}]$, on a mq $\begin{cases} u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases}$, donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

5. Soit $u_0 \in]-\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Comme f est croissante sur $]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}]$,

$$f(]-\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{3}}[) =]f(-\sqrt{2});f(-\frac{1}{\sqrt{3}})[=]-\sqrt{2};\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}[$$

Il y a donc deux cas possibles :

Cas 1 : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}[\subset [-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}]$

Cas 2 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Dans ce cas, comme on a mq $f(x)-x$ est ≥ 0 pour $x \in [-\sqrt{2};0]$, la suite (u_n) est croissante et majorée, donc converge vers un point fixe de f. Ce point fixe est donc forcément $\in]-\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{3}}]$, ce qui est impossible.

Le cas 2 amène à une absurdité, on en déduit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}]$. Par conséquent, les résultats de 4. s'appliquent, et (u_n) converge vers 0.

Si $u_0 \in]\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{2}[$, alors on peut se ramener au cas où $u_0 \in]-\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{3}}[$ en posant $\tilde{u}_0 = -u_0$, et, grâce au fait que f est impair, en définissant $\tilde{u}_{n+1} = f(\tilde{u}_n)$, on trouve que $\tilde{u}_n = -u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, $(\tilde{u}_n)$ converge vers 0, et donc (u_n) aussi.

6. Si $u_0 \in]-\infty;-\sqrt{2}[$, on montre par récurrence que (u_n) décroît en utilisant la question 1. Par conséquent, comme elle est monotone, ~~elle ne converge~~ elle converge ssi elle est bornée ssi elle ne diverge pas. Comme f n'admet aucun point fixe dans $]-\infty;-\sqrt{2}[$, on conclut que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

Par parité, si $u_0 \in]\sqrt{2};+\infty[$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

$\boxed{\text{Ex 20}}$: $\boxed{\text{NB}}$: compte tenu de la longueur des ex. précédents, je ne rédigerai pas la solution de celui-ci, et me contenterai de donner des réponses.

a) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ * Points fixes : $\{0,1\}$

* (u_n) est stationnaire si $u_0 \in \{-1; 0; 1\}$
  converge vers 0 si $u_0 \in]-1;0[\cup]0,1[$
  diverge vers $+\infty$ si $|u_0| > 1$.

b) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 1 \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ * Pas de point fixe $\Rightarrow$ (u_n) ne peut pas converger. On mq (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$ $\forall u_0 \in \mathbb{R}$.

c) $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ * (u_n) est bien définie ssi $u_0 \geqslant -1$ (vérifier que si $u_0 \geqslant -1$, alors u_n existe $\forall n \in \mathbb{N}$)

* point fixe : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
* $\sqrt{1+x} - x \geqslant 0$ ssi $x \in [-1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

donc si $u_0 \in [-1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$, (u_n) croît vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

si $u_0 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, (u_n) décroît vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

d) $f(x) = 1 + \ln(x)$

$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + \ln(u_n) \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ * Unique point fixe : 1

* $1 + \ln(x) - x \leqslant 0$ $\forall x > 0$

donc si $u_0 > 1$, alors (u_n) décroît vers 1

si $u_0 \in]0;1[$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $u_{n_0} \leqslant 0$, et donc (u_n) est mal définie.

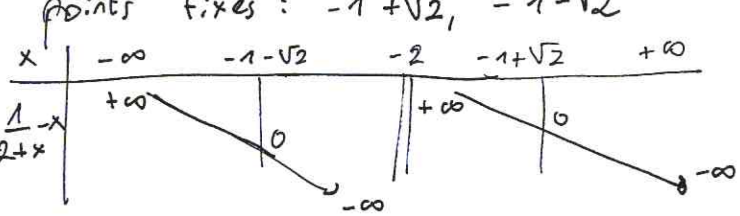
e) $\begin{cases} u_{n+1} = e^{u_n} - 1 \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ * unique point fixe : 0

* $e^x - 1 - x \geqslant 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, donc

si $u_0 < 0$, alors (u_n) croît vers 0

si $u_0 > 0$, (u_n) croît vers $+\infty$.

f) $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n} \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ * points fixes : $-1+\sqrt{2}$, $-1-\sqrt{2}$



$f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ est décroissante sur $]-2;+\infty[$, donc

$f^2(x) = \dfrac{2+x}{5+2x}$ est croissante sur ce même intervalle

$u_0 > -2 \Rightarrow u_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, et donc $u_0 > -2 \Rightarrow (u_{2n})$ et (u_{2n+1}) sont monotones, et l'étude du signe de $f^2(x) - x$ montre que

$u_0 \in]-2\,;-1+\sqrt{2}[\Rightarrow (u_{2n})$ croissante et (u_{2n+1}) décroissante; elles convergent donc vers $-1+\sqrt{2}$ et (u_n) aussi:

$u_0 > -1+\sqrt{2} \Rightarrow (u_{2n})$ décroissante et (u_{2n+1}) croissante $\Rightarrow (u_n)$ converge vers $-1+\sqrt{2}$.

Que dire si $u_0 < -2$? ...

$\boxed{\text{Ex 21}}$: 1. $3 \leq x \leq 5 \iff \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} \leq \frac{4}{x} \leq \frac{4}{3}$$
$$\Rightarrow 3+\frac{4}{5} \leq 3+\frac{4}{x} \leq 3+\frac{4}{3}$$
$$\Rightarrow 3 \leq 3+\frac{4}{x} \leq 5$$

2. $\varphi : [3;5] \longrightarrow [3;5]$
$\quad x \longmapsto 3+\frac{4}{x}$

a) Soit $x \in [3;5]$. $\varphi(x) = x \iff 3+\frac{4}{x} = x$
$$\iff 3x+4 = x^2$$
$$\iff x \in \{-1;4\} \iff x = 4.$$

b) Soit $x \in [3,5]$. $|\varphi(x)-4| = \left|3+\frac{4}{x}-4\right| = \left|\frac{-x+4}{x}\right| = \left|\frac{x-4}{x}\right|$
$$\leq \frac{|x-4|}{3} \leq \frac{|x-4|}{2}$$
car $|x| \geq 3$.

3. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a) On considère $v_n = |u_n - 4|$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après 2., $v_{n+1} = |\varphi(u_n) - 4| \leq \frac{|u_n-4|}{2} = \frac{v_n}{2}$, donc, par une récurrence immédiate, $0 \leq v_n \leq \frac{v_1}{2^{n-1}} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

En particulier, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$

b) D'après a), il suffit de trouver $N \in \mathbb{N}^*$ tq $v_N < 10^{-6}$.

Il suffit alors que $\frac{1}{2^{N-1}} < 10^{-6}$

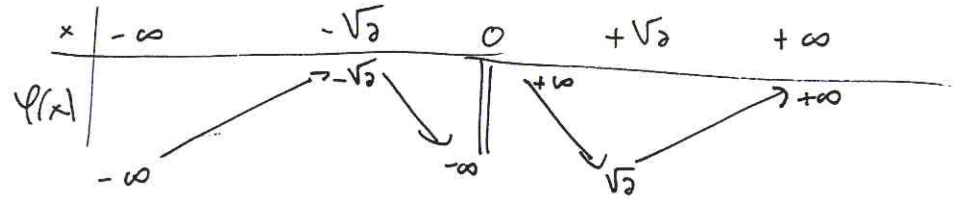
$$\Leftrightarrow -(N-1) < -6\log_2(10)$$
$$\Leftrightarrow N > 6\log_2(10) + 1.$$

Autrement, on peut choisir N explicitement : comme $2^{10} = 1024 > 10^3$

$N = 21$ suffit.

$\boxed{\text{Ex 22}}$: $a > 0$, $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \end{cases}$

1. $\varphi : x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$



2. On voit que $[\sqrt{a}\,; +\infty[$ est stable par φ. De plus, pour étudier la limite de (u_n) en $+\infty$, on peut supposer que $u_0 \geqslant \sqrt{a}$, quitte à considérer $\begin{cases} \tilde{u}_0 = \varphi(u_0) \\ \tilde{u}_{n+1} = \varphi(\tilde{u}_n) \end{cases}$

Si $x \in [\sqrt{a}\,; +\infty[$, $\varphi(x) - x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) - x = \frac{1}{2x}(-x^2 + a) \leqslant 0$

donc (u_n) est décroissante et minorée, donc converge vers le seul point fixe de $\varphi > 0$: $\sqrt{a}$.

3. $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$, $n \in \mathbb{N}$. $\quad v_{n+1} = \dfrac{\varphi(u_n) - \sqrt{a}}{\varphi(u_n) + \sqrt{a}} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) + \sqrt{a}}$

$$= \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{u_n^2 + a + 2u_n\sqrt{a}} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right)^2 = v_n^2$$

donc, par récurrence, $v_n = v_0^{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. Si $u_0 > \sqrt{a}$, $\quad |u_n - \sqrt{a}| = |v_n|\,|u_n + \sqrt{a}|$

$\leq |v_n|\,(u_0 + \sqrt{a})$ par décroissance de (u_n)

$\leq 2|v_n|\,u_0 = 2|v_0^{2^n}|\,u_0$

$\leq 2\,v_0^{2^n}u_0$ car $v_0 > 0$.

$\boxed{\text{Ex 23}}$: On voit $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$ et $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}$ comme des limites de suites. Plus exactement, on regarde

$$\underbrace{\sqrt{1}}_{u_0},\ \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1}}}_{u_1},\ \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}_{u_2},\ \dots \qquad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$$

$$\text{et } \underbrace{1}_{v_0},\ 1+\underbrace{\frac{1}{1+1}}_{v_1},\ \underbrace{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}_{v_2},\qquad v_{n+1} = 1+\frac{1}{v_n}$$

* $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est croissante sur $[0;+\infty[$, qui est stable par la fonction $\Rightarrow (u_n)$ est ~~croissante~~ monotone. De plus,

x	0	$\frac{1+\sqrt5}{2}$	$+\infty$
$\sqrt{1+x}-x$	$+$	0	$-$

, donc u_n croît vers $\frac{1+\sqrt5}{2}$.

* $f : x \mapsto 1+\frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$, qui est stable par la fonction $\Rightarrow (v_{2n})$ et (v_{2n+1}) sont monotones.

Qui plus est, $f^2(x) - x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} - x = 1-x+\frac{x}{1+x} = \frac{1-x^2+x}{1+x}$,

et donc

x	0	$\frac{1+\sqrt5}{2}$	$+\infty$
$f^2(x)-x$	$+$	0	$-$

donc (v_{2n}) croît vers $\frac{1+\sqrt5}{2}$ et (v_{2n+1}) décroît vers $\frac{1+\sqrt5}{2}$,

donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1+\sqrt5}{2}$, ce qui prouve le résultat.

$\boxed{\text{Ex 24}}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$.

1. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto a_i x^i$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Par conséquent, $f_n : x \mapsto 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Comme de plus $f_n(0) = 1$ et $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, et f_n est continue,

le TVI implique l'existence d'un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tq $f_n(x_n) = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $f_n(x_n) = 0$

$$\text{et } f_{n+1}(x_{n+1}) = 0,$$

$$\text{et donc } f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) - a_{n+1}x_n^{n+1}$$
$$= -a_{n+1}x_n^{n+1} \leq 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$$

Comme f_{n+1} est strictement décroissante, on en conclut que $x_n \geq x_{n+1}$

et donc (x_n) est décroissante.

3. (x_n) est minorée par 0 et décroît, donc elle converge.

$\boxed{\text{Ex 25}}$: $E_n : x + \tan(x) = n$, $x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

1. $f :]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x + \tan(x)$ est strictement croissante et continue,
et $\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2}} f(x) = \pm\infty$.

f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, E_n possède une unique solution $x_n = f^{-1}(n)$.

2. f est strictement croissante et $f(x_n) < f(x_{n+1})$ $(n < n+1)$

$$\Rightarrow x_n < x_{n+1}$$

donc (x_n) est croissante et majorée, elle converge vers $x_\infty \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

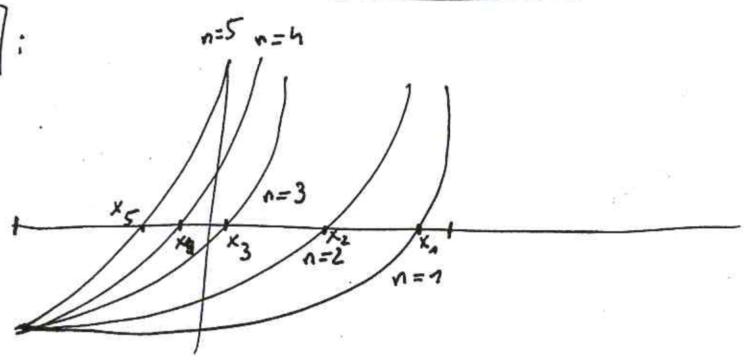
Si $x_\infty \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, alors, par continuité de f,

$$f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_\infty) < +\infty, \text{ or } f(x_n) = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

et donc $x_\infty = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{Ex 26}}$:

1.



on conjecture que (x_n) décroît.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $f_{n+1}(x_n) \geqslant f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$

et donc, comme f_{n+1} est strictement croissante,

$$x_n \geqslant x_{n+1}.$$

Par conséquent, (x_n) décroît.

3. $$f_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^n \ln(x) - 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. $$f_n'(x) = n x^{n-1} \ln(x) + x^n \frac{1}{x}$$
$$= n x^{n-1} \left(\ln(x) + 1 \right)$$

donc f_n est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Comme de plus $f_n(1) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, et ~~comme~~ f_n est continue, il existe un unique $x_n \in [1 ; +\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

Finalement, si $x \geqslant 1$, $$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} \ln(x) - 1 - x^n \ln(x) + 1$$
$$= \underbrace{x^n \ln(x)}_{\geqslant 0} \, (\underbrace{\cancel{}\ x - 1}_{\geqslant 0})$$

donc $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

Les résultats de 2. s'appliquent ; la suite (x_n) est décroissante.
Comme elle est de plus minorée par 1, elle converge.

$\boxed{\text{Ex } 27}$: $x e^x = n$

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad x \longmapsto x e^x$$ est strictement croissante, continue, et $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! \, x_n \in \mathbb{R}_+$ tq $f(x_n) = n$.

f strictement croissante et $f(x_{n+1}) > f(x_n) \Rightarrow x_{n+1} > x_n$

donc (x_n) croît.

(x_n) majorée $\Rightarrow$ elle converge vers $x_\infty \in \mathbb{R}_+$

$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_\infty) < +\infty$, c'est exclu.

Ainsi, (x_n) n'est pas majorée, donc elle diverge vers $+\infty$.