$\boxed{\text{TD 8}}$ - Analyse asymptotique

$\boxed{\text{Ex 1}}$

1. $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad \frac{1/x}{1/x^2} = x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

$$\frac{3}{1/x^2} = 3x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad , \text{ donc } \quad 3 \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Finalement, $o\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

2. $u_n \underset{n\to +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$

On commence par comparer les o : $\quad \frac{1/2^n}{1/n} = \frac{n}{2^n} = ne^{-n\ln(2)} \underset{n\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (croissances comparées)

donc $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$

et en particulier, $o\left(\frac{1}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\frac{1/n^2}{1/n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \underset{n\to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$

donc finalement, $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

3. $g(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x) + x\ln(x) + o(x^2\ln(x)) + x^2 + o(x^2)$

Comparons les o : $\quad \frac{x^2}{x} = x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\quad o(x^2) \underset{x\to 0}{=} o(x)$

$\frac{x^2\ln(x)}{x} = x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\quad o(x^2\ln(x)) \underset{x\to 0}{=} o(x)$

par contre, $\quad \frac{x\ln(x)}{x} = \ln(x) \underset{x\to 0}{\not\longrightarrow} 0$

donc $\quad g(x) \underset{x\to 0}{=} x + x\ln(x) + o(x)$.

4. $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)$

$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$

5. $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \cancel{n} + \cancel{o(n)} + \cancel{\sqrt{n}} + o(\cancel{\sqrt{n}}) + \frac{n^2}{\ln(n)} + n\ln(n) + o(n\ln(n))$

$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{n^2}{\ln(n)} + n\ln(n) + o(n\ln(n))$.

$\boxed{Ex\ 2}$: 1. a) $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1$

b) $\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\tan(x)-\tan(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} \tan'(0) = (\tan^2+1)(0) = 1$

c) $\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x-e^0}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} \exp'(0) = 1$

d) $\frac{sh(x)}{x} \longrightarrow sh'(0) = 1$

e) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $f : \,]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$

f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $f' : x \longmapsto \alpha(1+x)^{\alpha-1}$.

alors $\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0) = \alpha$

2. $\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1-(1-2\sin^2(x/2))}{x^2} = 2\left(\frac{\sin(x/2)}{x}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{2}\ \frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2$

$\xrightarrow[x\to 0]{} 2\left(\frac{1}{2}\sin'(0)\right)^2 = \frac{1}{2}$.

3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

a) $\frac{\sin(u_n)}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

b) idem, $\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

c) idem, $e^{u_n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

d) idem, $sh(u_n)-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

e) $\frac{1-\cos(u_n)}{u_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$, donc $\frac{1-\cos(u_n)}{\frac{1}{2}u_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $1-\cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}u_n^2$

f) $\frac{(1+u_n)^\alpha-1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$, donc $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$

$\boxed{Ex\ 3}$: a) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} - 1$.

Or, $\frac{1}{n}\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc d'après l'ex. 2,

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\ln(n)$.

b) $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n+1}{n^2-1} = \frac{2}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$

c) $u_n = \ln(n+\sqrt{n^2+1}) = \ln\left(n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)\right) = \ln(n) + \underbrace{\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}_{=o(\ln(n))}$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

d) $u_n = (n + 3\ln(n))\, e^{-(n+1)}$

$= (n + o(n))\, e^{-(n+1)} = n e^{-(n+1)} + o\left(n e^{-(n+1)}\right)$

donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n e^{-n-1}$

e) $u_n = \dfrac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$ Notons que $\dfrac{e^n}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. En effet, si on pose

$\cancel{V_n = \frac{n!}{e^n}}, \cancel{\ln(V_n) =}$

$V_n = \dfrac{e^n}{n!}$, $\ln(V_n) = n - \ln(n) - \ln(n-1) - \dots \ln(1)$.

$= n\Big(1 - \underbrace{\dfrac{\ln(1) + \dots + \ln(n)}{n}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}\Big)$ d'après le lemme de Cesàro

Alors $u_n = \dfrac{n!}{3^n} \underbrace{\left(\dfrac{1 + \frac{e^n}{n!}}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}\right)}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$ donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n!}{3^n}$.

f) $u_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ $\dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc d'après l'ex 2,

$\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, et donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$

$\boxed{\text{Ex 4}}$: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$.

a) ⇒ b) On suppose que (u_n) ne tend pas vers $+\infty$, c'est-à-dire que

$\exists M > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \leq M$.

Soit $N = 0$. Alors, il existe $n_0 \geq 0$ tq $u_{n_0} \leq M$.

Soit $N = n_0 + 1$, alors il existe $n_1 \geq n_0 + 1$ tq $u_{n_1} \leq M$

On peut ainsi construire, par récurrence, une suite d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tq $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{n_k} \leq M$. On a bien construit une suite extraite majorée.

b) ⇒ c) On suppose que (u_n) admet une suite extraite majorée, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, ~~tq~~ et $M \in \mathbb{R}$, tels que

$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(k)} \leq M$

Alors la suite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, et admet donc une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.

$$\exists \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ str. } \nearrow \text{ tq } (u_{\varphi(\psi(k))})_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Or, $\varphi\circ\psi$ est strictement croissante, donc (u_n) admet bien une sous-suite convergente.

c) $\Rightarrow$ a) On suppose que (u_n) admet une sous-suite convergente.

En particulier, (u_n) admet une sous-suite bornée :

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ et } \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ str. } \nearrow \text{ tq } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{\varphi(n)} \leq M.$$

Mais alors, $\forall N \in \mathbb{N}$, comme φ croît strictement, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\varphi(n) \geq N$, et donc en particulier,

$$\varphi(n) \geq N \text{ et } u_{\varphi(n)} \leq M.$$

Ainsi, (u_n) ne tend pas vers $+\infty$.

<u>Conclusion</u> : on a mq a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a), donc les prop. sont équivalentes

---

$\boxed{\text{Ex 5}}$ $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{|n^2 - u_n|},\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1. $n=0$: $u_0 \leq 0$, $u_1 = 1 \leq 1$

On suppose que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq n$.

$$\Rightarrow n^2 - u_n \geq n^2 - n \geq n(n-1) \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{n^2 - u_n} \leq \sqrt{n^2} \leq n \leq n+1.$$

donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n$.

2. $u_{n+1} = \sqrt{n^2 - u_n} = n \underbrace{\sqrt{1 - \frac{u_n}{n^2}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$ donc $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$

et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

$\boxed{\text{Ex 6}}$: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n} \text{ pour } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

$$\sqrt{1} = 1 \leq u_0 \leq \sqrt{1} + 1 = 2$$

Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n} + 1$.

alors, d'une part, $u_{n+1} \leq 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} = 1 + \sqrt{n}$

$$\leq \sqrt{n+1} + 1$$

et d'autre part, $u_{n+1} \geq 1 + \frac{n}{\sqrt{n}+1}$

et $$1 + \frac{n}{\sqrt{n}+1} - \sqrt{n+1} = \frac{\sqrt{n} + 1 + n - \sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+1\right)}{\sqrt{n}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n+1}\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) + \sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n+1} - 1\right)\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}+1} \geq 0$$

donc $u_{n+1} \geq \sqrt{n+1}$.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n} + 1$.

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

D'après le th. des gendarmes, $\frac{u_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

$\boxed{\text{Ex 7}}$:

$$a_n = \sqrt{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)}$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} n^{1/4} \sqrt{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} n^{-\frac{1}{4}} \sqrt{1 + o(1)}$$

donc $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} n^{-\frac{1}{4}}$

$$b_n = \sqrt{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}} = \sqrt{\frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)}} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} = \frac{1}{n} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$$

donc $b_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

$a_n + b_n \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} n^{-\frac{1}{4}} + o\left(n^{-\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, or $\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)$,

donc $a_n + b_n \underset{n \to +\infty}{\sim} a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} n^{-\frac{1}{4}}$

$\boxed{\text{Ex } 8}$:

a) $\dfrac{2x+5}{3x-4} = \dfrac{2+5/x}{3-4/x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x^2+x+1}{x+1} \xrightarrow[x\to1]{} \dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x}\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{x}{1+x}\right) \xrightarrow[x\to1^+]{} -\infty$

$\xrightarrow[x\to1^-]{} +\infty$

donc pas de limite en 1.

d) $\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{2}x$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{2}{x}$, pas de limite en 0.

e) $\sqrt{x^2+x+1}-(x+1) = \sqrt{(x+1)^2-x}-(x+1)$

$= (x+1)\left(\sqrt{1-\dfrac{x}{(x+1)^2}}-1\right)$

$\underset{x\to+\infty}{=} (x+1)\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{(x+1)^2} + o\left(\dfrac{x}{(x+1)^2}\right)\right)$

$\underset{x\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{x+1} + o\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\dfrac{1}{2}$.

f) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}-1\right)$

$\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{2} + o(1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$

g) $\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{2x}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to0]{} 0$ h) $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{2x}{3x} \xrightarrow[x\to0]{} \dfrac{2}{3}$

i) $\dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin(x)} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Or, $\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$, donc $x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to0]{} 0$

et donc $\dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)} \xrightarrow[x\to0]{} 0$

j) $\dfrac{\cos(\pi x)}{1-2x} = -\dfrac{1}{2}\;\dfrac{\cos(\pi x)-\cos\left(\pi\cdot\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}} \xrightarrow[x\to\frac{1}{2}]{} -\dfrac{1}{2}\left(-\pi\sin\left(\pi\cdot\tfrac{1}{2}\right)\right) = \dfrac{\pi}{2}$

k) $(2x^2+x-1)\tan(\pi x) = (2x-1)(x+1)\tan(\pi x)$

$= \dfrac{2x-1}{\cos(\pi x)}(x+1)\sin(\pi x) \xrightarrow[x\to\frac{1}{2}]{} -\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{3}{2} = -\dfrac{3}{\pi}$

l) $\dfrac{\cos(x)-1}{x^2} \longrightarrow -\dfrac{1}{2}$ (cf. ex 2)

m) $\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} \underset{x\to0}{=} \dfrac{\ln\left(1-(3x)^2/2+o(x^2)\right)}{\ln\left(1-(2x)^2/2+o(x^2)\right)} \underset{x\to0}{=} \dfrac{-\frac{(3x)^2}{2}+o(x^2)}{-\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)} \underset{x\to0}{=} \dfrac{9+o(1)}{4+o(1)} \xrightarrow[x\to0]{} \dfrac{9}{4}$

n) $\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

o) $(\ln x)^2 - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\dfrac{(\ln(x))^2}{\sqrt{x}} - 1\right) = \sqrt{x}\Bigg(\underbrace{\left(\dfrac{\ln(x)}{x^{1/4}}\right)^2}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} - 1\Bigg) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

p) $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \underbrace{\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

q) $\sqrt{x}(\ln(x))^3 = \left(x^{\frac{1}{6}}\ln(x)\right)^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

r) $\dfrac{\exp(\ln(x)^2)}{x^n} = \exp\left(\ln(x)^2 - n\ln(x)\right) = \exp\Big(\ln(x)\big(\underbrace{\ln(x) - n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}\big)\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

$\boxed{\text{Ex 9}}$: (Note : difficile sans faire de DL, facile avec).

On propose une correction qui utilise des DL d'ordre 2 :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \left(\text{et} \quad \frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)\right)$$

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{a}{\ln(1+x)} - \frac{b}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{a}{1-\frac{x}{2}+o(x)} - \frac{b}{1+\frac{x}{2}+o(x)}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1 - a\left(1+\frac{x}{2}\right) - b\left(1-\frac{x}{2}\right) + o(x)\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}(1-a-b) + \frac{(b-a)}{2} + o(1)$$

donc $\dfrac{1}{x} - \dfrac{a}{\ln(1+x)} - \dfrac{b}{e^x-1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \iff \begin{cases} 1-a-b = 0 \\ b-a = 0 \end{cases}$

$\iff a = b = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Ex 10}}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$

Notons T la période de f.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tq $x \geqslant x_0 \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \frac{1}{n}$.

Par périodicité de f, si la propriété est vraie sur une demi-droite, elle est vrai partout.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - l| \leqslant \frac{1}{n}$.

Or, le raisonnement est valide $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et donc

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - l| \leqslant 0 \Rightarrow f(x) = l$ et f est constante.

$\boxed{\text{Ex 11}}$:

a) $f : x \longmapsto \sin(\cos(x))$

On pose $u_n = 2n\pi$ et $v_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$,

mais $f(u_n) = \sin(1)$

$f(v_n) = \sin(0) = 0 \neq \sin(1)$

$f(u_n)$ et $f(v_n)$ ne converge pas vers la même limite $\Rightarrow f$ n'a pas de limite en $+\infty$.

b) $f : x \longmapsto \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$ Soit $g :]0;\cancel{+\infty}[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x + \frac{1}{x}$

g est strictement décroissante sur $]0;1[$ $\left(g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}\right)$

et $g(1) = 2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.

g réalise donc une bijection entre $]0;1[$ et $]2;+\infty[$.

Par conséquent, on peut définir, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$u_n = g^{-1}(2\pi n)$

$v_n = g^{-1}\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$

$u_n, v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et $f(u_n) = \cancel{k}\ \sin(2\pi n) = 0$

$f(v_n) = 1$

donc f n'a pas de limite en 0.

c) $f : x \longmapsto \frac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ ~~k~~ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f(n) = \frac{n^n}{n^n} = 1$

$\lim\limits_{x\to n^-} f(x) = \frac{n^n}{(n-1)^{(n-1)}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} n$

$\geqslant n$

~~donc~~ On considère : $u_n = n$, $v_n = n + \frac{1}{2}$

$f(u_n) = 1$

$f(v_n) = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{n^n} = \left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n}\right)^n \sqrt{n+\frac{1}{2}}$

$\geqslant \sqrt{n+\frac{1}{2}} \longrightarrow +\infty$

donc f n'admet pas de limite en $+\infty$

d) idem que pour b), $g :]0;+\infty[\longrightarrow]0;+\infty[$, $x \longmapsto e^{1/x^2}$ est une bijection.