Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019–2020

Fondamentaux des Mathématiques I

Feuille d'exercices n° 9

ARITHMÉTIQUE

Exercice 1. Effectuer la division euclidienne de a par b pour les valeurs de a et b suivantes :

a) $a = 2867$ et $b = 6$;

b) $a = 7813$ et $b = -12$;

c) $a = -959$ et $b = 6$;

d) $a = -1733$ et $b = -5$.

Exercice 2. Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si b divise a, alors $2^b - 1$ divise $2^a - 1$.
2. On note r le reste de la division euclidienne de a par b. Montrer que $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas de couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $7a - 4b^3 = 1$. *(Indication : raisonner modulo 7).*

Exercice 4.

1. (a) Déterminer un entier $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $7^{k_0} \equiv 1$ [12].
   (b) Déterminer un entier $k_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $6^{k_1} \equiv 0$ [12].
   (c) Déterminer un couple $(k_2, k_3) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k_2 < k_3$ et $3^{k_2} \equiv 3^{k_3}$ [12].
   (d) Déterminer les restes de la division euclidienne par 12 des nombres suivants : 7^{30}, 6^{13}, 3^{17}, 31^{77}, $19^5 + 30^{144} + 15^{10}$.
2. Démontrer que $2^{123} + 3^{121}$ est divisible par 11.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 122^{137} par 9.

Exercice 5. Déterminer le dernier chiffre de l'écriture décimale de 3^{1111}.

Exercice 6.

1. Calculer le plus grand diviseur commun de 126 et 230.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que n divise a, b et c si, et seulement si, il divise $\text{pgcd}(a, b)$ et c. En déduire que
$$\text{pgcd}(\text{pgcd}(a, b), c) = \text{pgcd}(a, \text{pgcd}(b, c)).$$
   On définit alors $\text{pgcd}(a, b, c) = \text{pgcd}(\text{pgcd}(a, b), c)$.
3. Calculer le plus grand diviseur commun des triples d'entiers suivants :
   a) $(390, 720, 450)$;
   b) $(180, 606, 750)$.

Exercice 7. Déterminer les couples d'entiers naturels (m, n) tels que

a) $\text{pgcd}(m, n) = 18$ et $m + n = 360$;

b) $\text{pgcd}(m, n) = 18$ et $mn = 6480$.

Exercice 8. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Montrer que si $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$, alors pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, on a l'équivalence : $ap = bq$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = bk$ et $q = ak$.
2. Étudier la réciproque.

Exercice 9. Trouver les couples $(a,b) \in \mathbb{Z}$ solutions des équations suivantes :

a) $18a + 5b = 11$; b) $39a - 12b = 121$; c) $14a - 21b = 49$.

Exercice 10. Déterminer les solutions $n \in \mathbb{Z}$ des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} n \equiv 1 \ [20] \\ n \equiv 3 \ [7] \, ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} n \equiv 13 \ [15] \\ n \equiv 6 \ [10] \, ; \end{cases}$ c) $\begin{cases} n \equiv 11 \ [15] \\ n \equiv 6 \ [10] \, ; \end{cases}$ d) $\begin{cases} n \equiv 3 \ [224] \\ n \equiv 17 \ [119]. \end{cases}$

Exercice 11.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$ si et seulement si $\mathrm{pgcd}(a+b, ab) = 1$.
2. A-t-on, pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(a+b, ab)$?

Exercice 12. Déterminer les valeurs de l'entier n pour lesquelles la fraction $\dfrac{n+2}{n+9}$ est irréductible ?

Exercice 13.

1. Soit $n > 1$ un nombre entier. Démontrer que, si $n = km$ avec k, m des entiers, et k impair, alors $2^m + 1$ divise $2^n + 1$. En déduire que si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.
2. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$; cet entier est appelé n-ième nombre de Fermat.
   (a) Calculer F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$F_{n+1} = F_0 F_1 \cdots F_n + 2.$$
   (c) En déduire que F_n et F_m sont premiers entre eux si m et n sont distincts.
3. Déduire de ce qui précède une démonstration de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 14.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 12.
2. Énumérer les diviseurs de 12.

Exercice 15.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Exprimer à l'aide de la décomposition en facteurs premiers de N le nombre $\sigma_0(N)$ de diviseurs positifs de N et leur somme $\sigma_1(N)$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers positifs possédant 6 diviseurs positifs dont la somme est 28.

Exercice 16. Montrer que pour tout entier n, $n^5 - n$ est divisible par 15.