Feuille 7 : Représentations maticielles des applications linéaires

Exercice 1-1

1. Soient $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et $f : \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ une application définie par $f(v) = Av$, $\forall v \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$. Montrer que f est une application linéaire.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donner une expression explicite de $f(v)$ pour chaque $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

Solution :

1. $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda v_1 + v_2) = A(\lambda v_1 + v_2) = \lambda A v_1 + A v_2 = \lambda f(v_1) + f(v_2)$.
2. $f(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+y \end{pmatrix}$.

Exercice 1-2 Trouver les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canonique des espaces vectoriels correspondants.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (2x+3y, -x+y)$.
   Solution : $f_1(e_1) = 2e_1 - e_2, f(e_2) = 3e_1 + e_2$ et donc $M_{\mathcal{C}}(f_1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (y, -x+y, 2x-y)$.
   Solution : Soit (e_1, e_2) la base canonique pour $\mathbb{R}^2$ et (e'_1, e'_2, e'_3) la base canonique pour $\in \mathbb{R}^3$.
   On a $f_2(e_1) = -e'_2 + 2e'_3, f_2(e_2) = e'_1 + e'_2 - e'_3$ et donc $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x+4y+z, -x+y+z)$.
   Solution : Soit (e_1, e_2) une base pour $\mathbb{R}^2$ et (e'_1, e'_2, e'_3) une base pour $\in \mathbb{R}^3$.
   On a $f_3(e'_1) = e_1 - e_2, f_3(e'_2) = 4e_1 + e_2, f_3(e_3) = e_1 + e_2$, et donc $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1-3 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z) = (2x-y+z, -x-y, 5x-y)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((1,2,0),(0,1,-1),(0,1,1))$ est une base pour $\mathbb{R}^3$.
   Solution : $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$. Donc la famille est une base.
2. Trouver la matrice de f dans la base canonique.
   Solution : Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique pour $\mathbb{R}^3$.
   On a $f(e_1) = 2e_1 - e_2 + 5e_3, f(e_2) = -e_1 - e_2 - e_3, f(e_3) = e_1$ et donc $M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Trouver la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
   Solution : Soit $v_1 = (1,2,0), v_2 = (0,1,-1), e_3 = (0,1,1))$. On a $f(v_1) = (0,-3,-3) = -3v_3 f(v_2) = (-2,-1,-1) = -2v_1 + 2v_2 + v_3, f(v_3) = (0,-1,-1) = -v_3$ et donc $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
4. Trouver la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ pour l'espace de départ et la base canonique pour l'espace de arrivée.
   Solution : On a $f(v_1) = (0,-3,-3) = -3e_2 - 3e_3, f(v_2) = (-2,-1,-1) = -2e_1 - e_2 - v_3, f(v_3) = (0,-1,-1) = -e_2 - e_3$ et donc $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Trouver la matrice de f dans la base canonique pour l'espace de départ et la base $\mathcal{B}$ pour l'espace de arrivée.

   Solution : $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
   $(x, y, z) = c_1(1, 2, 0) + c_2(0, 1, -1) + c_3(0, 1, 1) \Rightarrow c_1 = x, c_2 = \dfrac{y-2x-z}{2}, c_3 = \dfrac{y-2x+z}{2}$. On a, $f(e_1) = (2, -1, 5) = 2v_1 - 5v_2$, $f(e_2) = (-1, -1, -1) = -v_1 + v_2$, $f(e_3) = (1, 0, 0) = v_1 - v_2 - v_3$. Donc,
   $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1-4 Soient $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $h(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3$, $h(e_2) = e_1 + e_2 - e_3$, $h(e_3) = e_1 - 2e_3$.

1. Trouver la matrice M de f dans la base $\mathcal{C}$.

   Solution : $M_{\mathcal{C}}(h) = M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Quel est le rang de M ?

   Solution : $\det M = -2 \neq 0$ donc, M est de rang maximale $= 3$.

Exercice 1-5 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base pour le noyau de f.
2. Déterminer une base de l'image de f. Quel est le rang de A ?

Solution : Exo 1 de la fiche Printemps 2017.

Exercice 1-6 Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (u, v)$ et $\mathcal{B}' = (u', v', w')$ deux familles libres dans E. On considère l'application linéaire $f : \text{Vect}(u, v) \to \text{Vect}(u', v', w')$ définie par $f(u) = u' + 2v'$ et $f(v) = w'$.

1. Trouver la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ pour $\text{Vect}(u, v)$ et $\text{Vect}(u', v', w')$ respectivement.

   Solution : Puisque $f(u) = u' + 2v'$ et $f(v) = w'$, $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Trouver la dimension du noyau et de l'image de f.

   Solution : Le rang de M=2=dimension de l'image. Et donc le théorèm du rang on a $\dim\ker + rang = 2 \to \dim\ker = 0$.
   Au bien, $\forall a = c_1u + c_2v \in \text{Vect}(u, v) : f(a) = c_1f(u) + c_2f(v) = c_1(u' + 2v') + c_2w' = c_1u' + 2c_1v' + c_3w'$. Donc $\ker(f) = \{a = c_1u + c_2v \in \text{Vect}(u, v) : f(a) = c_1u' + 2c_1v' + c_3w' = 0\}$. Puisque (u', v', w') est une base dernière équation nous donne $c_1 = c_2 = 0$ et donc $a = 0$. Conclusion $\ker(f) = \{0\} \Rightarrow \dim\ker(f) = 0 \Rightarrow$ dimension de l'image $= 2$, par le théorèm du rang.

Exercice 1-7 Soient $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3$, $f(e_2) = e_2 - e_3$, $f(e_3) = -e_1 + 4e_3$. On considère $v_1 = 2e_1 - e_2$, $v_2 = -e_1 + e_3$, $v_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base pour $\mathbb{R}^3$.

   Solution : $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$. Donc, $\mathcal{B}$ est une famille libre de trois vecteurs alors est une base pour $\mathbb{R}^3$.

2. Trouver la matrice A de f dans la base $\mathcal{C}$ et puis trouver la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$. Quelle identité vérifient les matrices A et B ?

Solution : $M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Puisque $(x, y, z) = c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3 \Rightarrow c_1 = 2x+3y+2z, c_2 = x + 2y + 2z, c_3 = -x - 2y - z$ on a $f(v_1) = (4, 3, -3) = 12v_1 + 4v_2 - 7v_3, f(v_2) = (-3, -1, 5) = v_1 + 5v_2, f(v_3) = (3, 0, 4) = 14v_1 + 11v_2 - 7v_3$ et donc $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 14 \\ 4 & 5 & 11 \\ -7 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ On a $P^{-1}M_{\mathcal{C}}(f)P = M_{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 1-8 Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient $u = e_1 - e_2 + e_3$, $v = 2e_1 - e_2 + e_3$, $w = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. Calculer P^{-1}.
3. Déterminer la matrice R de g dans la base $\mathcal{B}$.
4. (a) Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de R.
   (b) Calculer R^4 et en déduire les valeurs de A^{4n}.

Solution : Exo 3 de la fiche Printemps 2017.

Exercice 1-9 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par $g(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$, $g(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$, $g(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$

1. Déterminer la matrice de g dans la base canonique.
2. Montrer que $E = \{v \in \mathbb{R}^3 : g(v) = v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul a de E.
3. Montrer que $F = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : -2v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base $\mathcal{B} = (b, c)$ de F.
4. Montrer que $(a, b, g(b))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution : Exo 9 de la fiche Printemps 2017.

Exercice 1-10 Soit $E \subset C^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions qui satisfont $y'' + y = 0$.

1. Montrer que $\alpha = \cos x \in E$ et $\beta = \sin x \in E$.
   Solution : $(\cos x)'' + \cos x = 0$ donc $\cos x \in E$. Et $(\sin x)'' + \sin x = 0$ donc $\sin x \in E$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (\alpha, \beta)$ est une base pour E, sachant que $\dim E = 2$.
   Solution : Supposons que $\exists c \neq 0 \in \mathbb{R}$ tel que $\cos x = c \sin x; \forall x \in \mathbb{R}$. pour $x = 0$ on obtient $1 = 0$. Contradiction donc $\cos x$ n'est pas colinéaire à $\sin x$. Donc (α, β) est une famille libre. Puisque $\dim E = 2$ (α, β) est une base.
3. On considère $g : \mathbb{R}^2 \to E$ définie par $\forall v = (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ g(v) = a \cos x + b \sin x$. Trouver la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et la base $\mathcal{B} = (\alpha, \beta)$ de E.
   Solution : $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que g est une bijection.
   Solution : $\text{rang}(M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g)) = 2 = \dim E$ et par le théorèm du rang $\dim \ker = 0$ donc g est une surjection et injection et donc une bijection.

Exercice 1-11 Soit $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$ définie par $u(P) = (P(-1), P(1))$.

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Trouver la matrice de u dans les bases canoniques $(1, X, X^2, X^3)$ et (e_1, e_2) de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement.

3. Déterminer le noyau et l'image de u.

Solution : Exo 14, partie I de la fiche Printemps 2017 et pour la matrice $u(1) = (1,1), u(X) = (-1,1), u(X^2) = (1,1), u(X^3) = (-1,1)$ Donc, $M(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1-12 Soit $h : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $h(P) = \int_1^X 2P(t)dt$.

1. Montrer que h est une application linéaire.

   Solution : $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, $h(\lambda P_1 + P_2) = \int_1^X 2(\lambda P_1 + P_2)(t)dt = \lambda h(P_1) + h(P_2)$.

2. Montrer que $\mathcal{B} = (1, 2+X, 4X+X^2)$ est une base pour $\mathbb{R}_2[X]$.

   Solution : $c_1 1 + c_2(2+X) + c_3(4X+X^2) = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$ donc $\mathcal{B}$ contient trois vecteur est libre et donc une base pour $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Trouver la matrice de h la base $\mathcal{B}$ pour l'espace de départ et la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ pour l'espace d'arrivée.

   Solution : $h(1) = 2(X-1)$, $h(2+X) = 4X + X^2 - 5$, $h(4X+X^2) = 4X^2 + \frac{2X^3}{3} - \frac{14}{3}$. Donc,

   $$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(h) = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -\frac{14}{3} \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 1-13 Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = P - (X-2)P'$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X-2, (X-2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. Déterminer la matrice de passage de P de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. Calculer P^{-1}.
7. Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Solution : Exo 9 de la fiche Printemps 2017.