

Feuille 10 : Fractions rationnelles

Exercice 1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples, sur \mathbb{R} puis sur \mathbb{C} , des fractions rationnelles suivantes.

- a) $\frac{1}{(X+1)(X-2)}$, $\frac{X}{(X+1)(X-2)}$, $\frac{X}{X^2-1}$.
- b) $\frac{X+1}{X^2+1}$, $\frac{X^2}{X^3-1}$.
- c) $\frac{X-1}{X^2(X^2+1)}$, $\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}$, $\frac{X^3+X^2+X-1}{(X^2+1)^2}$.
- d) $\frac{X^4}{X^2-3X+2}$, $\frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}$, $\frac{2X^5-10X^4+18X^3-31X^2+36X-1}{X^4-5X^3+7X^2-5X+6}$.

Solution : a) racines réelles :

feuille 6, exercice 1, $\frac{-1/3}{X+1} + \frac{1/3}{X-2}$, feuille 6, exercice 1, $\frac{1/3}{X+1} + \frac{2/3}{X-2}$, feuille 6, exercice 5, $\frac{1/2}{X-1} + \frac{-1/2}{X+1}$

b) racines complexes :

feuille 6, exercice 5, $\frac{X+1}{X^2+1} = \frac{1/2-i/2}{X-i} + \frac{1/2+i/2}{X+i}$,

feuille 6, exercice 5, $\frac{X^2}{X^3-1} = \frac{1/3}{X-1} + \frac{2X/3+1/3}{X^2+X+1} = \frac{1/3}{X-1} + \frac{1/3}{X-j} + \frac{1/3}{X-j^2}$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

c) racines multiples :

feuille 6, exercice 2 $\frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{-X+1}{X^2+1} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{-1/2-i/2}{X-i} + \frac{-1/2+i/2}{X+i}$

feuille 6, exercice 4, $\frac{X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{1/2-\sqrt{3}i/6}{X-j} + \frac{1/2+\sqrt{3}i/6}{X-j^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$,

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

$\frac{X+1}{X^2+1} + \frac{-2}{(X^2+1)^2} = \frac{1/2}{X-i} + \frac{1/2}{X+i} + \frac{1/2}{(X-i)^2} + \frac{1/2}{(X+i)^2}$

d) division euclidienne :

feuille 6, exercice 1, $X^2-3X-11 + \frac{-27X+22}{X^2-3X+2} = X^2-3X-11 + \frac{5}{X-1} + \frac{-32}{X-2}$

feuille 6, exercice 3, $X+1 + \frac{2X^2-X+1}{(X-1)(X^2-1)} = X+1 + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}$,

$2X + \frac{1}{X-2} - \frac{1}{X-3} + \frac{4X}{X^2+1} = 2X + \frac{1}{X-2} - \frac{1}{X-3} + \frac{2}{X-i} + \frac{2}{X+i}$

Exercice 2. Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} la fraction

$$F(X) = \frac{1}{(X^2+1)^2 - X^2}$$

Indication : Noter que F est paire, i.e. $F(X) = F(-X)$.

Solution : Voir feuille 6, exercice 6.

Exercice 3. Rappelez les primitives des éléments simples suivantes pour $x > 0$.

a) $\int x^n dx$, $n \in \mathbb{N}$,

b) $\int \frac{1}{x} dx$,

c) $\int \frac{1}{x^n} dx, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$

d) $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0.$

Solution : a) $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ b) $\ln|x| + C,$ c) $-\frac{n}{x^{n+1}} + C,$ d) $\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Exercice 4. Calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes en mentionnant les intervalles où le calcul est valable.

$$I_1(x) = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx, \quad I_2(x) = \int \frac{x}{x^2-3x+2} dx, \quad I_3(x) = \int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)},$$

$$I_4(x) = \int \frac{x^4}{x^3-3x+2} dx, \quad I_5(x) = \int \frac{dx}{x^3-1}.$$

Solution : Voir feuille 9, exercice 1.