

Feuille 10 : Fractions rationnelles

Exercice 1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples, sur \mathbb{R} puis sur \mathbb{C} , des fractions rationnelles suivantes.

- a) $\frac{1}{(X+1)(X-2)}$, $\frac{X}{(X+1)(X-2)}$, $\frac{X}{X^2-1}$.
- b) $\frac{X+1}{X^2+1}$, $\frac{X^2}{X^3-1}$.
- c) $\frac{X-1}{X^2(X^2+1)}$, $\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}$, $\frac{X^3+X^2+X-1}{(X^2+1)^2}$.
- d) $\frac{X^4}{X^2-3X+2}$, $\frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}$, $\frac{2X^5-10X^4+18X^3-31X^2+36X-1}{X^4-5X^3+7X^2-5X+6}$.

Exercice 2. Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} la fraction

$$F(X) = \frac{1}{(X^2+1)^2 - X^2}.$$

Indication : Noter que F est paire, *i.e.* $F(X) = F(-X)$.

Exercice 3. Rappelez les primitives des éléments simples suivantes pour $x > 0$.

- a) $\int x^n dx$, $n \in \mathbb{N}$,
- b) $\int \frac{1}{x} dx$,
- c) $\int \frac{1}{x^n} dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,
- d) $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$, $a > 0$.

Exercice 4. Calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes en mentionnant les intervalles où le calcul est valable.

$$I_1(x) = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx, \quad I_2(x) = \int \frac{x}{x^2-3x+2} dx, \quad I_3(x) = \int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)},$$

$$I_4(x) = \int \frac{x^4}{x^3-3x+2} dx, \quad I_5(x) = \int \frac{dx}{x^3-1}.$$