Feuille 11
Equations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1) $y'(x) = x^2 y(x)$.

2) $y'(x) - x^2 y(x) = x^2$.

3) $y'(x) - x^2 y(x) = x^2 + (1 - x^2)e^x$.

4) $y'(x) - x^2 y(x) = 2e^{\frac{x^3}{3}}$.
Déterminer la solution qui vérifie $y(0) = 1$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) = y(t) + t$ avec la condition initiale $y'(0) = 0$.

Exercice 3. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $xy' - (x + 2)y = x^4$ avec $y(1) = 1$.

Exercice 4. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$xy'(x) + y(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \text{avec} \quad y(1) = 0.$$

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1) $y'' + y' + y = (7x^2 + 3x + 4)e^{2x}$.

2) $y'' + 2y' + 9y = (8x^2 - 8x + 10)e^{-x}$.

3) $2y'' + y' - 3y = \cos x$.

4) $y'' - 2y' + y = 2 \sin x$.

5) $y'' - 4y' + 4y = xe^x$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1) $y'' - y = e^x$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

2) $2y'' + y' - 3y = (x-1)e^x$.

3) $y'' - 4y' + 4y = (6x+4)e^{2x}$.

4) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x + 2x^2$.

5) $y'' - y = 2\,\mathrm{ch}(x)$.

Exercice 7.

a) Trouver la solution générale y de l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = kt \qquad (\star)$$

où k est un paramètre réel.

b) Sachant que parmi les solutions de $(\star)$ trouvées dans la partie a) il en existe une telle que $y(0) = 0$ et $y(2\pi) = 1$, déterminer la valeur de k.

Exercice 8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 4y' + 3y = 3t^2 + 2t$.