Feuille 7 ANALYSE
Equations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:
1) $y'(x) = x^2 y(x)$.
2) $y'(x) - x^2 y(x) = x^2$.
3) $y'(x) - x^2 y(x) = x^2 + (1 - x^2)e^x$.
4) $y'(x) - x^2 y(x) = 2e^{\frac{x^3}{3}}$.
Déterminer la solution qui vérifie $y(0) = 1$.

Correction exercice 1.
1) La solution est $y(x) = \lambda e^{\int x^2 dx} = \lambda e^{\frac{x^3}{3}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2) La solution générale est $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$ où y_0 est la solution de l'équation homogène $y'(x) - x^2 y(x) = 0$, et y_p est une solution particulière. On remarque que $y_p(x) = -1$ convient. Donc la solution générale est $y(x) = \lambda e^{\frac{x^3}{3}} - 1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
3) e^x est une solution particulière de $y'(x) - x^2 y(x) = (1 - x^2)e^x$. Donc en utilisant 2), on en déduit que $e^x - 1$ est une solution particulière de l'équation 3). Donc la solution générale est $y(x) = \lambda e^{\frac{x^3}{3}} + e^x - 1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
4) La solution générale de l'équation homogène est :

$$y(x) = \lambda e^{\frac{x^3}{3}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ensuite on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme

$$y_P(x) = \lambda(x) e^{\frac{x^3}{3}}$$

On dérive

$$y_P'(x) = \lambda'(x) e^{\frac{x^3}{3}} + \lambda(x) \frac{3x^2}{3} e^{\frac{x^3}{3}} = \lambda'(x) e^{\frac{x^3}{3}} + \lambda(x) x^2 e^{\frac{x^3}{3}}$$

Ce que l'on remplace dans

$$y_P'(x) - x^2 y_P(x) = 2e^{\frac{1}{3}x^3}$$

$$\lambda'(x) e^{\frac{x^3}{3}} + \lambda(x) x^2 e^{\frac{x^3}{3}} - x^2 \lambda(x) e^{\frac{x^3}{3}} = 2e^{\frac{1}{3}x^3}$$

Comme prévu, les termes en $\lambda(x)$ s'éliminent

$$\lambda'(x) e^{\frac{x^3}{3}} = 2e^{\frac{1}{3}x^3}$$

Puis on simplifie par $e^{\frac{1}{3}x^3}$

$$\lambda'(x) = 2$$

Comme on cherche une solution particulière

$$\lambda(x) = 2x$$

Donc

$$y_P(x) = 2x e^{\frac{x^3}{3}}$$

La solution générale de l'équation avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière :

$$y(x) = \lambda e^{\frac{x^3}{3}} + 2x e^{\frac{x^3}{3}} = (\lambda + 2x) e^{\frac{x^3}{3}}$$

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow (\lambda + 2 \times 0) e^{\frac{0^3}{3}} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

La solution cherchée est

$$y(x) = e^{\frac{x^3}{3}} + 2x e^{\frac{x^3}{3}} = (1 + 2x) e^{\frac{x^3}{3}}$$

Exercice 2 :

Résoudre l'équation différentielle $y'(t) = y(t) + t$ avec la condition initiale $y'(0) = 0$

Correction exercice 2.

L'équation homogène est

$$y'(t) - y(t) = 0$$

Donc

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = 1$$

On intègre

$$\ln|y(t)| = t + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Puis on compose par l'exponentielle

$$y(t) = \lambda e^t, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

On peut aussi écrire
$y'(t) = 1 . y(t)$
$y(t) = \lambda e^{\int 1 dt}, \ \lambda \in \mathbb{R}$
$y(t) = \lambda e^t$

On peut deviner que $-t-1$ est solution particulière

Ensuite on cherche une solution particulière de $y'(t) = y(t) + t$ sous la forme

$$y_P(t) = \lambda(t)e^t$$

Alors

$$y_P'(t) = \lambda'(t)e^t + \lambda(t)e^t$$

Ce que l'on remplace dans $y_P'(t) = y_P(t) + t$

$$\lambda'(t)e^t + \lambda(t)e^t = \lambda(t)e^t + t$$

Ce qui équivaut à

$$\lambda'(t) = te^{-t}$$

Soit on fait une intégration par partie, soit on cherche une primitive de te^{-t} sous la forme

$$\lambda(t) = (at + b)e^{-t}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

On dérive

$$\lambda'(t) = ae^{-t} - (at + b)e^{-t} = (-at + a - b)e^{-t}$$

Et on identifie avec $\lambda'(t) = te^{-t}$

$$-at + a - b = t \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Donc

$$\lambda(t) = (-t - 1)e^{-t}$$

Ce qui entraine que

$$y_P(t) = -(t + 1)e^{-t}e^t = -t - 1$$

Et enfin la solution générale de $y'(t) = y(t) + t$ est

$$y(t) = \lambda e^t - t - 1$$

Ensuite on cherche λ tel que $y'(0) = 0$, $y'(t) = \lambda e^t - 1$

$$y'(0) = \lambda - 1$$

Donc $\lambda = 1$, et la solution recherchée est

$$y(t) = e^t - t - 1$$

Exercice 3 :

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$xy' - (x + 2)y = x^4$$

Avec $y(1) = 1$

Correction exercice 3.

L'équation homogène est

$$xy' - (x + 2)y = 0$$

Donc

$$\frac{y'}{y} = \frac{x + 2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$$

Par conséquent

$$\ln|y| = x + 2\ln(x) + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

On peut aussi écrire
$y' = \frac{x+2}{x} y = \left(1 + \frac{2}{x}\right) y$
$y = \lambda e^{\int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx}$
$(\lambda \in \mathbb{R})$

D'où l'on déduit que

$$y = \lambda e^{x + 2\ln(x)} = \lambda e^x \times e^{2\ln(x)} = \lambda e^x x^2$$

Puis on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme

$$y_P(x) = \lambda(x)x^2e^x$$

$$y_P'(x) = \lambda'(x)x^2e^x + 2\lambda(x)xe^x + \lambda(x)x^2e^x$$

$$xy_P'(x)-(x+2)y_P(x)=x^4 \Leftrightarrow x(\lambda'(x)x^2e^x+2\lambda(x)xe^x+\lambda(x)x^2e^x)-(x+2)\lambda(x)x^2e^x=x^4$$
$$\Leftrightarrow \lambda'(x)x^3\,e^x\ +2\lambda(x)x^2e^x+\ \lambda(x)x^3e^x-x^3\lambda(x)e^x-2\lambda(x)\underset{x^2}{\wedge}e^x=x^4 \Leftrightarrow \lambda'(x)x^3\,e^x$$
$$=x^4 \Leftrightarrow \lambda'(x)=xe^{-x}$$

On cherche $\lambda(x)$ sous la forme

$$\lambda(x)=(ax+b)e^{-x}$$
$$\lambda'(x)=ae^{-x}-(ax+b)e^{-x}=(-ax+a-b)e^{-x}=xe^{-x}$$

Ce qui entraine que $a=-1$ et que $a-b=0$, autrement dit que $b=-1$

$$\lambda(x)=(-x-1)e^{-x}$$

Et

$$y_P(x)=(-x-1)e^{-x}x^2e^x=-x^3-x^2$$

La solution générale de l'équation avec second membre est

$$y=\lambda x^2e^x-x^3-x^2$$
$$y(1)=\lambda e-1^3-1^2=\lambda e-2$$

Donc $y(1)=1$ équivaut à $\lambda=\frac{3}{e}$ et

$$y=\frac{3}{e}x^2e^x-x^3-x^2$$

Exercice 4 :

Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation

$$xy'(x)+y(x)=\frac{2x}{x^2+1};\qquad y(1)=0$$

Correction exercice 4.

Première méthode

L'équation homogène est

$$xy'(x)+y(x)=0$$
$$\frac{y'(x)}{y(x)}=-\frac{1}{x}$$

Donc

$$\ln|y(x)|=-\ln(x)+K,\ \ K\in\mathbb{R}$$

Ou bien on écrit
$y'(x)=-\frac{1}{x}y(x)$
$y(x)=\lambda e^{\int -\frac{1}{x}dx},\ \lambda\in\mathbb{R}.$

D'où

$$y(x)=\lambda e^{-\ln(x)}=\frac{\lambda}{x},\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Puis on recherche une solution particulière de $xy'(x)+y(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ de la forme

$$y_P(x)=\frac{\lambda(x)}{x}$$
$$y_P'(x)=\frac{\lambda'(x)x-\lambda(x)}{x^2}=\frac{\lambda'(x)}{x}-\frac{\lambda(x)}{x^2}$$
$$xy_P'(x)+y_P(x)=\frac{2x}{x^2+1}\Leftrightarrow x\left(\frac{\lambda'(x)}{x}-\frac{\lambda(x)}{x^2}\right)+\frac{\lambda(x)}{x}=\frac{2x}{x^2+1}\Leftrightarrow \lambda'(x)=\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow \lambda(x)$$
$$=\ln(x^2+1)$$

Par conséquent

$$y_P(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x}$$

Et la solution générale est

$$y(x)=\frac{\lambda}{x}+\frac{\ln(x^2+1)}{x},\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Deuxième méthode

$$xy'(x)+y(x)=\frac{2x}{x^2+1}\Leftrightarrow \big(xy(x)\big)'=(\ln(x^2+1))'\Leftrightarrow xy(x)=\ln(x^2+1)+\lambda\Leftrightarrow y(x)=\frac{\lambda}{x}+\frac{\ln(x^2+1)}{x},\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Puis parmi ces solutions on cherche celle qui vérifie $y(1)=0$

Comme

$$y(1)=\lambda+\ln(2)$$

On a $\lambda=-\ln(2)$

Donc

$$y(x)=\frac{-\ln(2)}{x}+\frac{\ln(x^2+1)}{x}$$

Exercice 5 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$

1. $y''+y'+y=(7x^2+3x+4)e^{2x}$
2. $y''+2y'+9y=(8x^2-8x+10)e^{-x}$
3. $2y''+y'-3y=\cos(x)$
4. $y''-2y'+y=2\sin(x)$
5. $y''-4y'+4y=xe^x$ avec $y(0)=0$ et $y'(0)=0$

Correction exercice 5.

1. Résolution de l'équation homogène $(EH) : y''+y'+y=0$

   Son équation caractéristique est $r^2+r+1=0$, dont le discriminant vaut $\Delta=-3$ et ses deux racines complexes conjuguées sont

   $$r_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\text{et}\quad r_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   La solution générale de (EH) est :

   $$y=e^{-\frac{1}{2}x}(\lambda_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\lambda_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),\quad \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$$

   $\omega=2+0\times i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique de (EH) donc on cherche une solution particulière de la forme :

   $$y_P=(ax^2+bx+c)e^{2x}$$
   $$y_P'=2(ax^2+bx+c)e^{2x}+(2ax+b)e^{2x}=(2ax^2+(2a+2b)x+b+2c)e^{2x}$$
   $$y_P''=2(2ax^2+(2a+2b)x+b+2c)e^{2x}+(4ax+2a+2b)e^{2x}=(4ax^2+(8a+4b)x+2a+4b+4c)e^{2x}$$

   $$y_P''+y_P'+y_P=(7x^2+3x+4)e^{2x}$$
   $$\Leftrightarrow (4ax^2+(8a+4b)x+2a+4b+4c)e^{2x}+(2ax^2+(2a+2b)x+b+2c)e^{2x}+(ax^2+bx+c)e^{2x}=(7x^2+3x+4)e^{2x}\Leftrightarrow 7ax^2+(10a+7b)x+2a+5b+7c=7x^2+3x+4\Leftrightarrow\begin{cases}7a=7\\10a+7b=3\\2a+5b+7c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\7b=-7\\2a+5b+7c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\-3+7c=4\end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=1\end{cases}$$

   Donc $y_P=(x^2-x+1)e^{2x}$ et la solution générale de l'équation avec second membre est :

   $$y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(\lambda_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\lambda_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)+(x^2-x+1)e^{2x},\quad\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$$

2. Résolution de l'équation homogène $(EH) : y''+2y'+9y=0$

Son équation caractéristique est $r^2 + 2r + 9 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = -32$ et ses deux racines complexes conjuguées sont

$$r_1 = \frac{-2 - 4i\sqrt{2}}{2} = -1 - 2i\sqrt{2} \text{ et } r_2 = \frac{-2 + 4i\sqrt{2}}{2} = -1 + 2i\sqrt{2}$$

La solution générale de (EH) est :

$$y = e^{-x}(\lambda_1 \cos(2\sqrt{2}x) + \lambda_2 \sin(2\sqrt{2}x)), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$\omega = -1 + 0 \times i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique de (EH) donc on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_P = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

$$y_P' = -(ax^2 + bx + c)e^{-x} + (2ax + b)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$$

$$y_P'' = -(-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x} + (-2ax + 2a - b)e^{-x}$$
$$= (ax^2 + (-4a + b)x + 2a - 2b + c)e^{-x}$$

$$y_P'' + 2y_P' + 9y_P = (8x^2 - 8x + 10)e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow (ax^2 + (-4a + b)x + 2a - 2b + c)e^{-x} + 2(-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$$
$$+ 9(ax^2 + bx + c)e^{-x} = (8x^2 - 8x + 10)e^{-x} \Leftrightarrow 8ax^2 + 8bx + 2a + 8c$$
$$= 8x^2 - 8x + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = 8 \\ 8b = -8 \\ 2a + 8c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Donc $y_P = (x^2 - x + 1)e^{-x}$ et la solution générale de l'équation avec second membre est :

$$y = e^{-x}(\lambda_1 \cos(2\sqrt{2}x) + \lambda_2 \sin(2\sqrt{2}x)) + (x^2 - x + 1)e^{2x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

3. Résolution de l'équation homogène (EH) : $2y'' + y' - 3y = 0$

Son équation caractéristique est $2r^2 + r - 3 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 25$ et ses deux racines sont

$$r_1 = \frac{-1 - 5}{4} = -\frac{3}{2} \text{ et } r_2 = \frac{-1 + 5}{4} = 1$$

La solution générale de (EH) est :

$$y = \lambda_1 e^{x} + \lambda_2 e^{-\frac{3}{2}x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$\omega = 0 + 1 \times i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique de (EH) donc on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_P = A\cos(x) + B\sin(x)$$
$$y_P' = -A\sin(x) + B\cos(x)$$
$$y_P'' = -A\cos(x) - B\sin(x)$$

$$2y_P'' + y_P' - 3y_P = \cos(x)$$
$$\Leftrightarrow 2(-A\cos(x) - B\sin(x)) - A\sin(x) + B\cos(x) - 3(A\cos(x) + B\sin(x))$$
$$= \cos(x) \Leftrightarrow (-5A + B)\cos(x) + (-A - 5B)\sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -5A + B = 1 \\ -A - 5B = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5A + B = 1 \\ A = -5B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25B + B = 1 \\ A = -5B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{26} \\ A = \frac{-5}{26} \end{cases}$$

Donc $y_P = -\frac{5}{26}\cos(x) + \frac{1}{26}\sin(x)$ et la solution générale de l'équation avec second membre est :

$$y = \lambda_1 e^{x} + \lambda_2 e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{5}{26}\cos(x) + \frac{1}{26}\sin(x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

4. Résolution de l'équation homogène (EH) : $y'' - 2y' + y = 0$

Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0$, dont elle admet une racine double $r_0 = 1$

La solution générale de (EH) est :

$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$\omega = 0 + 1 \times i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique de (EH) donc on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_P = A\cos(x) + B\sin(x)$$
$$y_P' = -A\sin(x) + B\cos(x)$$
$$y_P'' = -A\cos(x) - B\sin(x)$$

$y_P'' - 2y_P' + y_P = 2\sin(x) \Leftrightarrow A\cos(x) + B\sin(x) - 2(-A\sin(x) + B\cos(x)) - A\cos(x) - B\sin(x) = 2\sin(x) \Leftrightarrow 2A\sin(x) - 2B\cos(x) = 2\sin(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 2 \\ -2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$ Donc $y_P = \cos(x)$

et la solution générale de l'équation avec second membre est :

$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^x + \cos(x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

5. Résolution de l'équation homogène $(EH) : y'' - 4y' + 4y = 0$
   Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$, dont elle admet une racine double $r_0 = 2$
   La solution générale de (EH) est :
   $$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{2x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$
   $\omega = 1 + 0 \times i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique de (EH) donc on cherche une solution particulière de la forme :
   $$y_P = (Ax + B)e^x$$
   $$y_P' = Ae^x + (Ax + B)e^x = (Ax + A + B)e^x$$
   $$y_P'' = Ae^x + (Ax + A + B)e^x = (Ax + 2A + B)e^x$$
   $y_P'' - 4y_P' + 4y_P = xe^x \Leftrightarrow (Ax + 2A + B)e^x - 4(Ax + A + B)e^x + 4(Ax + B)e^x = xe^x \Leftrightarrow (Ax - 2A + B)e^x = xe^x \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$. Donc $y_P = (x+2)e^x$ et la solution générale de l'équation avec second membre est :
   $$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{2x} + (x+2)e^x, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$
   $$y' = \lambda_2 e^{2x} + 2(\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{2x} + e^x + (x+2)e^x = (2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_2 x)e^{2x} + (x+3)e^x$$
   $$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$
   $$y = (-2 + x)e^{2x} + (x+2)e^x$$

Exercice 6 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$

1. $y'' - y = e^x$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$
2. $2y'' + y' - 3y = (x-1)e^x$
3. $y'' - 4y' + 4y = (6x+4)e^{2x}$
4. $y'' - 2y' + 2y = e^x\sin(x) + 2x^2$
5. $y'' - y = 2\,\mathrm{ch}(x)$

Correction exercice 6.

1. Résolution de l'équation homogène $(EH) : y'' - y = 0$
   Son équation caractéristique est $r^2 - 1 = (r-1)(r+1) = 0$, dont elle admet deux racines
   $$r_1 = -1 \quad \text{et} \quad r_2 = 1$$
   La solution générale de (EH) est :
   $$y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^x, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$
   $\omega = 1 + 0 \times i$ est racine de l'équation caractéristique de (EH) donc on cherche une solution particulière de la forme :
   $$y_P = xAe^x = Axe^x$$
   $$y_P' = Ae^x + Axe^x = A(x+1)e^x$$
   $$y_P'' = Ae^x + A(x+1)e^x = A(x+2)e^x$$

$y_P'' - y_P = A(x+2)e^x - Axe^x = e^x \Leftrightarrow 2Ae^x = e^x \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$. Donc $y_P = \frac{1}{2}xe^x$ et la solution générale de l'équation avec second membre est :

$$y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^x + \frac{1}{2}xe^x, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Détermination de la solution particulière vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

$$y' = -\lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^x + \frac{1}{2}(x+1)e^x$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Par conséquent la solution générale de l'équation avec second membre est :

$$y = \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}xe^x$$

2. Résolution de l'équation homogène $(EH) : 2y'' + y' - 3y = 0$

   Son équation caractéristique est $2r^2 + r - 3 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 25$ et ses deux racines sont

$$r_1 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1+5}{4} = 1$$

   La solution générale de (EH) est :

$$y = \lambda_1 e^{\ x} + \lambda_2 e^{-\frac{3}{2}x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

   $\omega = 1 + 0 \times i = 1$ est racine de l'équation caractéristique de (EH) donc on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_P = x(Ax+B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$$

$$y_P' = (2Ax+B)e^x + (Ax^2+Bx)e^x = (Ax^2 + (2A+B)x + B)e^x$$

$$y_P'' = (2Ax + 2A + B)e^x + (Ax^2 + (2A+B)x + B)e^x = (Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B)e^x$$

$$\begin{aligned} 2y_P'' + y_P' - 3y_P = (x-1)e^x \\ &\Leftrightarrow 2(Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B)e^x + (Ax^2 + (2A+B)x + B)e^x \\ &- 3(Ax^2 + Bx)e^x = (x-1)e^x \\ &\Leftrightarrow \big((2A + A - 3A)x^2 + (8A + 2A + 2B + B - 3B)x + 4A + 4B + B\big)e^x = (x-1)e^x \\ &\Leftrightarrow (10Ax + 4A + 5B)e^x = (x-1)e^x \Leftrightarrow 10Ax + 4A + 5B = x - 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 10A = 1 \\ 4A + 5B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{10} \\ 5B = -1 - \frac{4}{10} = -\frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{10} \\ B = -\frac{7}{25} \end{cases} \end{aligned}$$

   Donc

$$y_P = \left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{7}{25}x\right)e^x$$

   Par conséquent la solution générale de l'équation avec second membre est :

$$y = \lambda_1 e^{\ x} + \lambda_2 e^{-\frac{3}{2}x} + \left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{7}{25}x\right)e^x, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

3. Résolution de l'équation homogène $(EH) : y'' - 4y' + 4y = 0$

   Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$, dont elle admet une racine double $r_0 = 2$

   La solution générale de (EH) est :

$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{2x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

   $\omega = 2 + 0 \times i = 2$ est racine double de l'équation caractéristique de (EH) donc on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_P = x^2(Ax+B)e^{2x} = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$$

$$y_P' = (3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + 2(Ax^3 + Bx^2)e^{2x} = (2Ax^3 + (3A + 2B)x^2 + 2Bx)e^{2x}$$
$$y_P'' = (6Ax^2 + 2(3A + 2B)x + 2B)e^{2x} + 2(2Ax^3 + (3A + 2B)x^2 + 2Bx)e^{2x}$$
$$= (4Ax^3 + (12A + 4B)x^2 + (6A + 8B)x + 2B)e^{2x}$$
$$y_P'' - 4y_P' + 4y_P = (6x + 4)e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow (4Ax^3 + (12A + 4B)x^2 + (6A + 8B)x + 2B)e^{2x}$$
$$- 4(2Ax^3 + (3A + 2B)x^2 + 2Bx)e^{2x} + 4(Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow \big((4A - 8A + 4A)x^3 + (12A - 12A + 4B - 8B + 4B)x^2 + (6A + 8B - 8B)x$$
$$+ 2B\big)e^{2x} = (6x + 4)e^{2x} \Leftrightarrow (6Ax + 2B)e^{2x} = (6x + 4)e^{2x} \Leftrightarrow 6Ax + 2B = 6x + 4$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$$

Donc
$$y_P = (x^3 + 2x^2)e^{2x}$$
Par conséquent la solution générale de l'équation avec second membre est :
$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{2x} + (x^3 + 2x^2)e^{2x} = (x^3 + 2x^2 + \lambda_2 x + \lambda_1)e^{2x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

4. Résolution de l'équation homogène $(EH) : y'' - 2y' + 2y = 0$
Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 2 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = -4$, elle admet deux racines complexes conjuguées
$$r_1 = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$
La solution générale de (EH) est :
$$y = e^x(\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$
Le second membre a deux termes de nature différente, il faut utiliser le théorème de fractionnement des solutions particulières, soit y_{P_1} une solution particulière de
$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x)$$
soit y_{P_2} une solution particulière de
$$y'' - 2y' + 2y = 2x^2$$
On commence par chercher y_{P_2} sous la forme
$$y_{P_2} = ax^2 + bx + c$$
$$y_{P_2}' = 2ax + b$$
$$y_{P_2}'' = 2a$$
$$y_{P_2}'' - 2y_{P_2}' + 2y_{P_2} = 2x^2 \Leftrightarrow 2a - 2(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2$$
$$\Leftrightarrow 2ax^2 + (-4a + 2b)x + 2a - 2b + 2c = 2x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ -4a + 2b = 0 \\ 2a - 2b + 2c = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = b - a = 1 \end{cases}$$
Dont $y_{P_2} = x^2 + 2x + 1$
$\omega = 1 + 1 \times i = 1 + i$ est racine de l'équation caractéristique donc on cherche une solution particulière y_{P_1} de la forme
$$y_{P_1} = xe^x(A\cos(x) + B\sin(x)) = e^x(Ax\cos(x) + Bx\sin(x))$$
$$y_{P_1}' = e^x(A\cos(x) + B\sin(x)) + xe^x(A\cos(x) + B\sin(x)) + xe^x(-A\sin(x) + B\cos(x))$$
$$= e^x\Big(\big((A + B)x + A\big)\cos(x) + \big((-A + B)x + B\big)\sin(x)\Big)$$

$$y''_{P_1} = e^x\Big(\big((A+B)x+A\big)\cos(x) + \big((-A+B)x+B\big)\sin(x)\Big)$$
$$+ e^x\Big((A+B)\cos(x) - \big((A+B)x+A\big)\sin(x) + (-A+B)\sin(x) + \big((-A+B)x+B\big)\cos(x)\Big)$$
$$= e^x\big((2Bx+2A+2B)\cos(x) + (-2Ax-2A+2B)\sin(x)\big)$$
$$y''_{P_1} - 2y'_{P_1} + 2y_{P_1} = e^x\sin(x)$$
$$\Leftrightarrow e^x\big((2Bx+2A+2B)\cos(x) + (-2Ax-2A+2B)\sin(x)\big) - 2e^x\Big(\big((A+B)x+A\big)\cos(x) + \big((-A+B)x+B\big)\sin(x)\Big) + 2e^x(Ax\cos(x) + Bx\sin(x)) = e^x\sin(x)$$
$$\Leftrightarrow e^x\big((2Bx-2Ax-2Bx+2Ax+2A+2B-2A)\cos(x) + (-2Ax+2Ax-2Bx+2Bx-2A+2B-2B)\sin(x)\big) = e^x\sin(x)$$
$$\Leftrightarrow e^x(2B\cos(x) - 2A\sin(x)) = e^x\sin(x) \Leftrightarrow 2B\cos(x) - 2A\sin(x) = \sin(x)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2A = 1 \\ 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Donc

$$y_{P_1} = -\frac{1}{2}xe^x\cos(x)$$

Une solution particulière de $y'' - 2y' + 2y = e^x\sin(x) + 2x^2$ est donc

$$y_P = y_{P_1} + y_{P_2} = -\frac{1}{2}xe^x\cos(x) + x^2 + 2x + 1$$

Et sa solution générale est

$$y = e^x(\lambda_1\cos(x) + \lambda_2\sin(x)) - \frac{1}{2}xe^x\cos(x) + x^2 + 2x + 1, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

5. Résolution de l'équation homogène $(EH) : y'' - y = 0$

Son équation caractéristique est $r^2 - 1 = (r-1)(r+1) = 0$, dont elle admet deux racines

$$r_1 = -1 \quad \text{et} \quad r_2 = 1$$

La solution générale de (EH) est :

$$y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^x, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$
$$y'' - y = 2\,\mathrm{ch}(x) = e^x + e^{-x}$$

Le second membre a deux termes de nature différente, il faut utiliser le théorème de fractionnement des solutions particulières, soit y_{P_1} une solution particulière de

$$y'' - y = e^x$$

soit y_{P_2} une solution particulière de

$$y'' - y = e^{-x}$$

On a vu à la question 1. que

$$y_{P_1} = \frac{1}{2}xe^x$$

$\omega = -1 + 0 \times i = -1$ est racine de l'équation caractéristique de (EH) donc on cherche une solution particulière y_{P_2} de la forme :

$$y_{P_2} = Axe^{-x}$$
$$y'_{P_2} = -Axe^{-x} + Ae^{-x} = A(-x+1)e^{-x}$$
$$y''_{P_2} = -Ae^{-x} - A(-x+1)e^{-x} = A(x-2)e^{-x}$$
$$y''_{P_2} - y_{P_2} = e^{-x} \Leftrightarrow A(x-2)e^{-x} - Axe^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow -2Ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Donc

$$y_{P_2} = -\frac{1}{2}x\,e^{-x}$$

Par conséquent une solution particulière de $y'' - y = \mathrm{ch}(x)$ est :

$$y_P = y_{P_1} + y_{P_2} = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}xe^{-x}$$

Et sa solution générale :

$$y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^x + \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}xe^{-x}, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 7 :

a) Trouver la solution générale y de l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = kt \qquad (*)$$

Où k est un paramètre réel.

b) Sachant que parmi les solutions de $(*)$ trouvées dans la partie a) il en existe une telle que $y(0) = 0$ et $y(2\pi) = 1$, déterminer la valeur de k.

Correction exercice 7.

a) La solution générale de l'équation homogène $y''(t) + y(t) = 0$ est

$$y(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Il existe une solution particulière de $(*)$ de la forme $y_P(t) = At + B$, comme $y_P''(t) = 0$

$$y_P''(t) + y_P(t) = kt \Leftrightarrow At + B = kt \Leftrightarrow \begin{cases} A = k \\ B = 0 \end{cases}$$

Donc $y_P(t) = kt$ et la solution générale de $(*)$ est :

$$y(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) + kt, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b)

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(2\pi) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda + 2k\pi = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ k = \dfrac{1}{2\pi} \end{cases}$$

Exercice 8 :

$$y'' + 4y' + 3y = 3t^2 + 2t$$

Correction exercice 8.

Soit (E') l'équation homogène associée

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

Son équation caractéristique est $r^2 + 4r + 3 = 0$, ses racines sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -3$

La solution générale de (E') est

$$y = \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{-3t}$$

Avec λ_1 et λ_2 deux constantes réelles.

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme

$$\varphi_P(t) = at^2 + bt + c$$

Où a, b et c sont trois constantes réelles.

$$\varphi_P'(t) = 2at + b \quad et\ \varphi_P''(t) = 2a$$

Ce que l'on remplace dans l'équation avec second membre.

$$2a + 4(2at + b) + 3(at^2 + bt + c) = 3t^2 + 2t \Leftrightarrow 3at^2 + [8a + 3b]t + 2a + 4b + 3c = 3t^2 + 2t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ 8a + 3b = 2 \\ 2a + 4b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 3b = -6 \\ 2a + 4b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ 2 - 8 + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Donc $\varphi_P(t) = t^2 - 2t + 2$ et la solution générale de l'équation avec second membre est

$$y = \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{-3t} + t^2 - 2t + 2$$