Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE Math4
Année universitaire 2018/2019
Printemps 2019

Corrigé du CC3 du 12.04.2019

Exercice 1. Le but de cet exercice est de calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie, pour tout $x \neq 0$, par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} e^{-|x|}.$$

Soit $[-1, 1]$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[-1, 1]$, c'est-à-dire que

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de $\frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$.
2. Grace à la formule d'inversion de la transformée de Fourier, en déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.
3. Calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-|x|}$.
4. **Question bonus :** On rappelle que si f_1 et f_2 sont deux fonctions de carré intégrable, alors la transformée de Fourier de leur produit est donnée par $\mathcal{F}[f_1 f_2] = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[f_1]) * (\mathcal{F}[f_2])$.
   En conclure que
   $$\mathcal{F}[f](p) = \arctan(p+1) - \arctan(p-1).$$

Corrigé. On pose, dans tout l'exercice, $f_1 = \mathrm{sinc}$, et $f_2 : x \mapsto e^{-|x|}$.

1. Soit $p \in \mathbb{R}^*$.
   $$\frac{1}{2}\widehat{\chi_{[-1,1]}}(p) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(x) e^{-ixp} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ixp} dx$$
   $$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-ixp}}{-ip}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{ip} - e^{-ip}}{2ip} = \frac{\sin(p)}{p}.$$
   Le même calcul, lorsque $p = 0$, donne $\frac{1}{2}\widehat{\chi_{[-1,1]}}(0) = 1$, donc $\frac{1}{2}\widehat{\chi_{[-1,1]}} = f_1$.
2. La formule d'inversion de Fourier s'applique car les fonctions sont de carré intégrable : soit $x \in \mathbb{R}$, alors
   $$\widehat{f_1}(x) = \frac{1}{2}\widehat{\widehat{\chi_{[-1,1]}}}(x) = \frac{2\pi}{2}\chi_{[-1,1]}(-x) = \pi\chi_{[-1,1]}(x).$$
3. On procède à un calcul direct. Soit $p \in \mathbb{R}$, alors
   $$\begin{aligned}\widehat{f_2}(p) &= \int_R e^{-|x|} e^{-ixp} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_-} e^{x(-ip+1)} dx + \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x(ip+1)} dx \\ &= \frac{1}{1-ip}\left[e^{x(-ip+1)}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1+ip}\left[e^{-x(ip+1)}\right]_{0}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-ip} + \frac{1}{1+ip} \\ &= \frac{2}{1+p^2}.\end{aligned}$$

4. $f = f_1 f_2$, donc, en appliquant directement la formule, pour $p \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(p) = \widehat{f_1 f_2}(p) &= \frac{1}{2\pi}\left(\widehat{f}_1 * \widehat{f}_2\right)(p) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \pi\chi_{[-1,1]}(p-q)\frac{2}{1+q^2}dq \\
&= \int_{p-1}^{p+1} \frac{1}{1+q^2}dq \\
&= \arctan(p+1) - \arctan(p-1).
\end{aligned}$$

Exercice 2. Calculer la dérivée au sens des distributions

1. du produit $\sin(x)\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x)$
2. des produits $\sin(x)\delta_0$ et $\cos(x)\delta_0$, où δ_0 est la distribution de Dirac en 0.
3. **Question bonus :** donner la dérivée seconde des distributions des deux questions précédentes.

Corrigé. On rappelle le résultat suivant : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux avec des sauts éventuels en a_1, a_2, $\ldots, a_n$. Alors, la dérivée de la distribution associée à f est

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{k=1}^{n}(f(a_k^+) - f(a_k^-))\delta_{a_k},$$

où f' est la dérivée de f partout où elle existe.

1. $f(x) = \sin(x)\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, elle n'est dérivable ni en $-\pi/2$, ni en $\pi/2$, et admet $x \mapsto \cos(x)\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x)$ comme dérivée partout ailleurs. Les sauts de la fonction f valent tous les deux -1, et donc

$$(T_f)' = T_{\cos\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}} - \delta_{-1} - \delta_1.$$

   On répète l'argument pour calculer la dérivée seconde, mais cette fois, $x \mapsto \cos(x)\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x)$ ne présente aucun saut. Alors

$$(T_f)'' = -T_{\sin\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}} - \delta'_{-1} - \delta'_1.$$

2. On commence par simplifier les produits. Soit φ une fonction test. Alors

$$(\sin\delta_0)(\varphi) = \delta_0(\sin\varphi) = \sin(0)\varphi(0) = 0,$$

   et

$$(\cos\delta_0)(\varphi) = \delta_0(\cos\varphi) = \cos(0)\varphi(0) = \varphi(0),$$

   donc $\sin\delta_0 = 0$ et $\cos\delta_0 = \delta_0$, et on en conclut immédiatement que

$$(\sin\delta_0)' = (\sin\delta_0)'' = 0, \quad (\cos\delta_0)' = \delta_0', \quad (\cos\delta_0)'' = \delta_0''.$$