Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Année 2018–2019
Printemps 2019

FICHE TD 1 – Intégrales impropres

Exercice 1 Calculer par intégration par parties ou changement de variables les intégrales à bornes suivantes :

$$(a) \int_0^{2\pi} x\cos(x)dx, \quad (b) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 2 Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ? ($n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$).

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a}, \quad (b) \int_0^{\infty} e^{-4t}dt, \quad (c) \int_0^{\infty} t^2e^{-t}dt, \quad (d) \int_0^{\infty} t^n e^{-t}dt,$$

$$(e) \int_0^{\infty} e^{-t^2}dt, \quad (f) \int_0^{\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}dt, \quad (g) \int_2^{\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt, \quad (h) \int_0^1 \log(t)dt,$$

$$(i) \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt, \quad (j) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt, \quad (k) \int_0^{+\infty} \log(t)dt, \quad (l) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n},$$

$$(m) \int_0^{\infty} e^{-bx}\sin(ax)dx, \quad (n) \int_0^{\infty} \frac{\sin(bx)}{x}e^{-ax}dx, \quad (o) \int_0^{\pi} \log(\sin(t))dt, \quad (p) \int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \log\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt.$$

Exercice 3 On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est absolument intégrable (ou sommable) sur $\mathbb{R}$ si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty.$$

Que peut-on dire des limites en $\pm\infty$ d'une fonction f absolument intégrable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 Soit $F : [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction bornée, qui est dérivable et de dérivée continue. Montrer que l'intégrale impropre

$$\int_1^{\infty} \frac{F'(x)}{x}dx$$

est convergente. En déduire la convergence de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos(x)}{x}dx$ et de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.

Exercice 5 Discuter selon les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_{2019}^{\infty} \frac{1}{(\log t)^a t^b}dt.$$