$\boxed{\text{TD 1}}$ - Intégrales impropres

Exercice 1 :

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos(x)\,dx$

On pose $u(x) = x$ $u'(x) = 1$
$v(x) = \sin(x)$ $v'(x) = \cos(x)$

Les fonctions u et v sont C^1 sur $[0;2\pi]$, on peut donc appliquer la méthode de l'intégration par parties.

$$= \int_0^{2\pi} u(x)v'(x)\,dx$$
$$= [u(x)v(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} u'(x)v(x)\,dx$$
$$= [x\sin(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx$$
$$= 0 - [-\cos(x)]_0^{2\pi} = 0$$

(b) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

On effectue le changement de variable $x = \sin(t)$, $t \in [-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}]$

$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $-\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $dx = \cos(t)dt$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(t)\,dt}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}$$
$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\cos^2(t)}}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(t)}{|\cos(t)|}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{3}.$$

Exercice 2 :

Outils à connaître :
- théorème fondamental de l'analyse
- critère de Riemann
- théorèmes de comparaison
- intégration par parties

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$ converge si, et seulement si, $a > 1$

(b) $$\int_0^{+\infty} e^{-4t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-4t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{-4}e^{-4t}\right]_0^x$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{4}(e^{-4x}-1)\right)$$
$$= \frac{1}{4}$$, donc l'intégrale converge.

(c) $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt$ On pourrait procéder par IPP pour connaître la valeur exacte, mais il est plus rapide d'invoquer les croissances comparées pour affirmer

$$t^4 e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, \quad \text{donc} \quad t^2e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ lorsque } t\to+\infty,$$

et donc $\int_1^{+\infty} t^2e^{-t}dt$ converge. Comme $\int_0^1 t^2e^{-t}dt$ converge aussi, $\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt$ converge.

(d) Même argument que (c), avec $t^{n+2}e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(e) Même argument que (c), car $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2e^{-t^2} = \lim\limits_{y\to+\infty} ye^{-y} = 0$,

donc $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

(f) $\frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} \sim t^{5-4-\frac12} = t^{-\frac12}$, donc $\int_1^{+\infty}\frac{t^5}{(1+t^4)\sqrt{t}}dt$ diverge,

idem pour $\int_0^{+\infty}\frac{t^5}{(1+t^4)\sqrt{t}}dt$.

(g) $\int_2^{+\infty}\left(1-\cos\left(\frac1t\right)\right)dt$

$$1-\cos\left(\frac1t\right) = 1-\left(1-\frac12\left(\frac1t\right)^2+o\left(\frac1{t^2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac1{t^2}\right) \quad \text{lorsque } t\to+\infty$$

Or, $t\longmapsto \frac{1}{2t^2}$ est intégrable sur $[2;+\infty[$, donc l'intégrale converge.

(h) $\int_0^1 \log(t)dt = \lim\limits_{x\to0}\int_x^1 \log(t)dt = \lim\limits_{x\to0}\left[t\log(t)-t\right]_x^1$

$$= \lim_{x\to0}\left(-1-x\log(x)+x\right) = -1$$

donc l'intégrale converge

(i) $\int_0^1 \sin\left(\frac1t\right)dt$. $\forall t\in]0;1[$, $\left|\sin\left(\frac1t\right)\right|\leq 1$, et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $]0;1[$, donc l'intégrale converge.

(j) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \lim_{x\to 1} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \lim_{y\to -1} \int_y^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

En reprenant les résultats du premier exercice,

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\arcsin(x)} dt = \arcsin(x)$$

(on aurait aussi pu reconnaître la dérivée de arcsin)

et donc l'intégrale converge, et

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

(k) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \log(t)\,dt$ on a déjà établi que $\displaystyle\int_0^1 \log(t)\,dt$ converge.

Cependant, $\displaystyle\int_1^x \log(t)\,dt = [t\log(t) - t]_1^x = x\log(x) - x + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \log(t)\,dt$ diverge, et a fortiori $\displaystyle\int_0^{+\infty} \log(t)\,dt$ aussi.

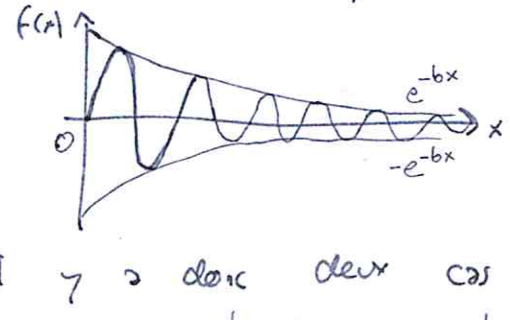
(l) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ $\quad (1+x^2)^{-n} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{-2n}$ dont l'intégrale sur $[1;+\infty[$ converge si, et seulement si, $2n>1$

donc $\Leftrightarrow n\in\mathbb{N}^*$.

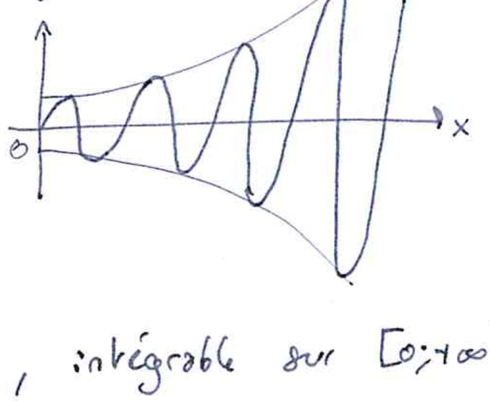
$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ converge $\forall n\in\mathbb{N}$. Ainsi, l'intégrale converge $\Leftrightarrow n\in\mathbb{N}^*$.

(m) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-bx}\sin(ax)\,dx$, soit $f(x) = e^{-bx}\sin(ax)$

Si $b>0$,



si $b<0$



Il y a donc deux cas :

* si $b>0$, $|e^{-bx}\sin(ax)| \leq e^{-bx}$, intégrable sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale converge.

* si $b\leq 0$, on montre qu'elle diverge. En effet, supposons qu'elle ~~converge~~ converge. Dans ce cas,

$$\int_{\frac{2k\pi}{a}}^{\frac{(2k+1)\pi}{a}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{(2k+1)\pi}{a}} f(x)dx - \int_0^{\frac{2k\pi}{a}} f(x)dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(x)dx - \int_0^{+\infty} f(x)dx = 0$$

Or, si $x \in \left[\frac{2k\pi}{a} ; \frac{(2k+1)\pi}{a}\right]$, $f(x) = e^{-bx}\sin(ax) \geqslant \sin(ax)$ (car $b \leqslant 0$)

et donc

$$\int_{\frac{2k\pi}{a}}^{\frac{(2k+1)\pi}{a}} f(x)\,dx \geqslant \int_{\frac{2k\pi}{a}}^{\frac{(2k+1)\pi}{a}} \sin(ax)dx = \left[-\frac{1}{a}\cos(ax)\right]_{\frac{2k\pi}{a}}^{\frac{(2k+1)\pi}{a}}$$

$$= -\frac{1}{a}(-1-(-1)) = \frac{2}{a} \underset{k\to+\infty}{\not\to} 0$$

donc c'est exclu, et l'intégrale diverge, indépendamment de $a>0$.

(n) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(bx)}{x} e^{-ax}$ si $b \neq 0$, $\sin(bx) \underset{x\to0}{\sim} bx$, et donc

$$\frac{\sin(bx)}{x}e^{-ax} \underset{x\to0}{\sim} b, \text{ qui est intégrable sur } [0,1].$$

En $+\infty$, $\left|\frac{\sin(bx)}{x}e^{-ax}\right| \leqslant \frac{e^{-ax}}{x}$ qui est intégrable sur $[1;+\infty]$, car $a>0$, et donc l'intégrale converge $\forall\, b \in \mathbb{R}$, $a>0$.

(o) $\int_0^{\pi} \log(\sin(t))\,dt$ $\quad \sin(t) = t + o(t^2)$ lorsque $t \to 0$, donc

$$\log(\sin(t)) = \log(t + o(t^2))$$
$$= \log(t(1+o(t)))$$
$$= \log(t) + \log(1+o(t))$$
$$= \log(t) + o(t) \quad \text{lorsque } t\to 0,$$

et cette fonction est intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, d'après (h), donc $\int_0^{\pi/2} \log(\sin(t))dt$ converge

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin(t))dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin(\pi-t))\,dt \underset{s=\pi-t}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \log(\sin(s))ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(t))dt,$$

donc l'intégrale converge.

(p) $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \log\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$. Notons que lorsque $t \geqslant \frac{2}{\pi}$, $\frac{1}{t} \leqslant \frac{\pi}{2}$

et donc $\cos\left(\frac{1}{t}\right) \geqslant 0$

donc l'intégrale est bien définie.

On effectue le changement de variable $x = \frac{1}{t}$, et alors

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \log\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \log(\cos(x)) \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} dx$$

* En 0 : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ ~~alors~~ $+ o(x^3)$ lorsque $x \to 0$, donc

$$\frac{\log(\cos(x))}{x^2} = \frac{\log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x^2} \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{1}{2}$$

donc il n'y a pas de pb d'intégrabilité en 0.

* En $\frac{\pi}{2}$: $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi}{2} - x + o\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$,

donc $$\frac{\log(\cos(x))}{x^2} \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\log\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x^2}$$

On peut poser $y = \frac{\pi}{2} - x$, et on est ramené à étudier ~~l'intégrale~~ l'intégrabilité de $\frac{\log(y)}{\left(\frac{\pi}{2} - y\right)^2}$ en $y = 0$. Or, si $y \in [0; \varepsilon[$, pour un certain $\varepsilon \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\left|\frac{\log(y)}{\left(\frac{\pi}{2} - y\right)^2}\right| \leq \frac{|\log(y)|}{\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)^2}$ qui est intégrable sur $[0; \varepsilon[$. Ainsi, $\int_0^{\varepsilon} \frac{\log(y)}{\left(\frac{\pi}{2} - y\right)^2} dy = \int_{\frac{\pi}{2} - \varepsilon}^{\pi/2} \frac{\log\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x^2} dx$ converge, donc

$$\int_{\frac{\pi}{2} - \varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} dx \text{ converge.}$$

* En combinant ces deux points, on peut finalement conclure que l'intégrale converge.

Exercice 3 :

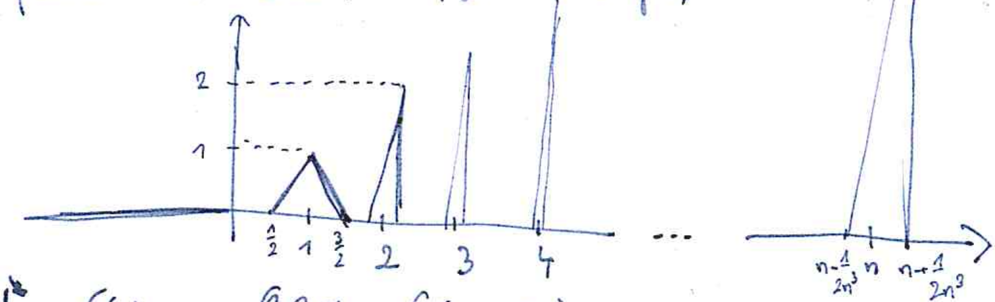
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$$

On ne peut pas dire grand chose sur les limites de f en $\pm\infty$, à part la chose suivante :

Si $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} L \in \mathbb{C}$, alors $L = 0$.

En effet, si $L \neq 0$, alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} L$, qui n'est pas intégrable, donc c'est exclu.

Par contre, f ne tend pas forcément vers un complexe en $\pm\infty$. Par exemple,



$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = n$, $f\left(n \pm \frac{1}{2n^3}\right) = 0$, et f est affine par morceaux.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \sum \text{Aire des triangles} = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n^3} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2} < +\infty$,

alors que f ne converge pas vers 0 en $+\infty$, et n'est même pas bornée.

Exercice 4 :

* $F : [1 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ bornée dérivable, F' continue.

$$\int_1^{+\infty} \frac{F'(x)}{x}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{F'(x)}{x}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \left(\left[\frac{1}{x} F(x)\right]_1^A + \int_1^A \frac{F(x)}{x^2}\,dx \right)$$

Or, $\left[\frac{1}{x} F(x)\right]_1^A = \frac{F(A)}{A} - F(1) \xrightarrow[A \to +\infty]{} -F(1)$ car F est bornée,

et $\left|\frac{F(x)}{x^2}\right| \leq \frac{C}{x^2}$ qui est intégrable sur $[1;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(x)}{x^2}\,dx$ converge.

On en déduit donc que $\int_1^{+\infty} \frac{F'(x)}{x} dx$ converge.

* On pose $F(x) = \sin(x)$. F est ~~continue~~ dérivable et bornée, de dérivée $F' = \cos$ continue.

Le résultat précédent s'applique donc, et

$$\int_1^{+\infty} \frac{F'(x)}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx \quad \text{converge.}$$

* Idem, avec $F(x) = -\cos(x)$.

<u>Exercice 5</u> :

$\int_{2019}^{+\infty} \frac{1}{(\log t)^2 t^b} dt$ $\quad f : t \mapsto \frac{1}{(\log t)^2 t^b}$ est continue, donc le seul souci (éventuel) d'intégration est en $+\infty$.

* Si $b > 1$, soit $b' \in]1; b[$. Alors

$$\frac{t^{b'}}{(\log(t))^2 t^b} = \frac{1}{(\log(t))^2 t^{b-b'}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad \text{par croissances comparées car } b - b' > 0.$$

Ainsi, $f(t) = o\left(\frac{1}{t^{b'}}\right)$ en $+\infty$, et est donc intégrable par critère de Riemann

* Si $b < 1$, alors

$$\frac{t}{\log(t)^2 t^b} = \frac{t^{1-b}}{\log(t)^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$$

, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \geq M$, $t f(t) \geq 1$, et donc $f(t) \geq \frac{1}{t}$, qui n'est pas intégrable sur $[M; +\infty[$. Ainsi $\int_{2019}^{+\infty} f(t) dt$ diverge

* si $b=1$, et $a \neq 1$, on reconnaît une dérivée :

$$\left(\log(t)^{-a+1} \right)' = (1-a)\,\frac{1}{t}\,\log(t)^{-a}$$

$$= (1-a)\, f(t)$$

ainsi, $\displaystyle\int_{2019}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{A \to +\infty} \left[\log(t)^{-a+1} \right]_{2019}^{A}$

$$< +\infty \iff a > 1.$$

* si $b=1$ et $a=1$, on reconnaît encore une dérivée :

$$\left(\log(\log(t)) \right)' = \frac{1}{t}\,\frac{1}{\log(t)} = f(t)$$

et donc $\displaystyle\int_{2019}^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Pour résumer, $\displaystyle\int_{2019}^{+\infty} \frac{1}{t^b (\log(t))^a}\,dt$ converge si,

et seulement si :

$$\begin{cases} b > 1 \\ \text{ou} \\ b = 1 \text{ et } a > 1. \end{cases}$$