

FICHE TD 2 – Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1 En utilisant le théorème de convergence dominée, calculer la limite quand $n \rightarrow \infty$ des intégrales suivantes :

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx, \quad (b) \int_0^\infty \frac{dx}{x^n + e^x}, \quad (c) \int_0^\infty \frac{\sin(nx)}{nx + x^2} dx, \quad (d) \int_0^\infty \frac{n \log(1 + \frac{x}{n})}{x(1 + x^2)} dx,$$

$$(e) \int_{-\infty}^\infty \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

Exercice 2 Pour $p > 0$, soit

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Le but est de calculer $F(p)$ en passant par sa dérivée.

1. Montrer que l'intégrale dans la définition de $F(p)$ est convergente pour tout $p > 0$.
2. Soit $p_0 > 0$. Montrer que $F'(p)$ existe pour tout $p \geq p_0$. En déduire que $F'(p)$ existe pour tout $p > 0$.
3. Vérifier, en dérivant, que

$$\frac{p \sin x + \cos x}{1 + p^2} e^{-px}$$

est une primitive de $-e^{-px} \sin x$, puis calculer $F'(p)$.

4. En déduire que $F(p) = -\arctan p + C$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que

$$C = \lim_{p \rightarrow +\infty} (F(p) + \arctan p) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3 Dérivation des intégrales à paramètres.

$$\text{Soit } f(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-t} \sin(tx)}{1 + t^4} dt.$$

1. Montrer que l'intégrale définissant $f(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la k -ième dérivée $f^{(k)}(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que f vérifie l'équation différentielle : $f^{(4)}(x) + f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$.

Exercice 4 Étude de la fonction Γ d'Euler.

$$\text{Soit } \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que Γ est définie et continue sur $[a, b]$, pour tout $b > a > 0$. En déduire que Γ est définie et continue sur $]0; \infty[$.
2. Montrer que $\forall x \in]0; \infty[$, $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n + 1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Exprimer $\Gamma'(x)$ à l'aide d'une intégrale paramétrique.