TD2 - Intégrales dépendant d'un paramètre

$\boxed{\text{Ex } 1}$ a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx$

La fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $[0;\frac{\pi}{4}]$, et $\begin{cases} \tan(0)=0 \\ \tan(\frac{\pi}{4})=1 \end{cases}$

Ainsi, * $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;\frac{\pi}{4}]$, $|\tan^n(x)| \leq 1$

et $x \mapsto 1$ est intégrable

* $\forall x \in [0;\frac{\pi}{4}[$, $\tan^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc, par convergence dominée,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 0 = 0.$$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+e^x}$

* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\left|\frac{1}{x^n+e^x}\right| \leq \frac{1}{e^x}$, et $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x} = 1$

* $\forall x \in [0,1[$, $\frac{1}{x^n+e^x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e^x}$

$\forall x \in]1;+\infty[$, $\frac{1}{x^n+e^x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi, par CVD, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+e^x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{e^x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1-e^{-1}.$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{nx+x^2}dx$

* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq 1$, $\left|\frac{\sin(nx)}{nx+x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$

$\forall x \in [0;1]$, $\left|\frac{\sin(nx)}{nx+x^2}\right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{nx} \leq \frac{nx}{nx} = 1$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\left|\frac{\sin(nx)}{nx+x^2}\right| \leq g(x)$, où

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

g est intégrable par critère de Riemann..

* $\forall x > 0$, $\frac{\sin(nx)}{nx+x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et donc, par CVD,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{nx+x^2}dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\log(1+x/n)}{x(1+x^2)}\,dx$ On utilise le fait que $\forall t \geq 0$, $\log(1+t) \leq t$.

* Alors $\forall n \geq 0$, $\forall x > 0$, $\displaystyle\left|\frac{n\log(1+x/n)}{x(1+x^2)}\right| \leq \frac{n\, x/n}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$

et $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable.

* $\forall x > 0$, $n\log(1+x/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ (car $\log(1+t) = t + o(t)$ lorsque $t \to 0$)

et donc par CVD, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\log(1+x/n)}{x(1+x^2)}\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$ * $\displaystyle\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{n-k} = 1 + n\frac{x^2}{n} + \text{termes positifs}$$

$$\geq 1 + x^2$$

On en déduit que $\displaystyle\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

On note en particulier que $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

* $\displaystyle\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\log\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\right) = \exp\left(-n\left(\frac{x^2}{n} + o\left(\frac{x^2}{n}\right)\right)\right)$ lorsque $n \to +\infty$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(-x^2)$$

Par CVD, on conclut que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

Calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx =: I$.

Par Fubini, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2}\,dx\,dy$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy\right) = I^2.$$

Or, en passant aux coordonnées polaires,

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{+\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^{+\infty} r e^{-r^2}\,dr$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} = \pi$$

et donc $I = \sqrt{\pi}$.

$\boxed{\text{Ex 2}}$: Pour $p>0$, $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

On définit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$$(x,p) \longmapsto e^{-px} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

1. Soit $p>0$. Alors, $\forall x>0$, $|f(p,x)| = \left|e^{-px} \frac{\sin(x)}{x}\right| \leq \underbrace{e^{-px} \frac{|x|}{x}}_{= e^{-px}}$

Or, $x \longmapsto e^{-px}$ est intégrable, donc $x \mapsto f(\cancel{x}, p)$ l'est aussi par comparaison, et $\int_0^{+\infty} e^{-px} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge.

2. Soit $p_0>0$. Pour tout $x>0$, $p \longmapsto f(x,p)$ est dérivable sur $[p_0 ; +\infty[$

de dérivée $\frac{\partial f}{\partial p}(x,p) = -x e^{-px} \frac{\sin(x)}{x} = -e^{-px} \sin(x)$

En particulier, $\forall p \geq p_0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\right| \leq e^{-px} \leq e^{-p_0 x}$.
Comme $x \longmapsto e^{-p_0 x}$ est intégrable et indépendant de p, on en déduit, d'après le th. de dérivation sous l'intégrale, que F est dérivable sur $[p_0 ; +\infty[$, et que
$$F'(p) = \int_0^{+\infty} -e^{-px} \sin(x) dx.$$

Soit maintenant $p>0$. Le raisonnement précédent assure que F est dérivable sur $[p/2 ; +\infty[$, et donc en p, d'où finalement : F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $\varphi(x) = \frac{p\sin(x) + \cos(x)}{1+p^2} e^{-px}$. $\varphi'(x) = \frac{p\cos(x) - \sin(x)}{1+p^2} e^{-px} - p \frac{p\sin(x) + \cos(x)}{1+p^2} e^{-px}$

$$= -\sin(x) e^{-px},$$

donc, d'après le th. fondamental,
$$F'(p) = \left[\frac{p\sin(x) + \cos(x)}{1+p^2} e^{-px} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{1+p^2}$$

4. $F'(p) = -\frac{1}{1+p^2}$, donc, comme $p \longmapsto \operatorname{atan}(p)$ est une primitive de $p \longmapsto \frac{1}{1+p^2}$,

il existe une constante C tq $F(p) = -\operatorname{atan}(p) + C$.

5. $F(p) = -\arctan(p) + C$, donc $\lim\limits_{p\to+\infty} F(p) = -\frac{\pi}{2} + C$.

De plus, comme on l'a vu dans 1, $\forall x>0, \forall p>0$,

$$|f(p,x)| \leqslant e^{-px}$$

et donc $\forall p \geqslant 1$, $|f(p,x)| \leqslant e^{-x}$, et $x \longmapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$,

donc la CVD permet d'affirmer que

$$\lim_{p\to+\infty} F(p) = \int_0^{+\infty} \lim_{p\to+\infty} e^{-px}\frac{\sin(x)}{x}dx = 0,$$

d'où finalement $C = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{Ex 3}}$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{1+t^4}dt \quad , \text{ soit } \varphi(x,t) = \frac{e^{-t}\sin(tx)}{1+t^4}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|\varphi(x,t)| \leqslant \frac{e^{-t}}{1+t^4}$, et cette fonction est intégrable. Par comparaison, $t \longmapsto \varphi(x,t)$ l'est aussi; et donc $\int_0^{+\infty}\varphi(x,t)dt$ converge.

2. On raisonne par récurrence : démontrons la propriété (P_k) :

$f^{(k)}$ existe et $f^{(k)}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{t^k e^{-t}(-1)^{k/2}\sin(tx)}{1+t^4}dt & \text{si } k \text{ est pair} \\ \displaystyle\int \frac{t^k e^{-t}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\cos(tx)}{1+t^4}dt & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$

* (P_0) est vraie, c'est la définition de f.
* Supposons (P_k) vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Pour simplifier, supposons k pair (la démonstration est la même si k est impair).

+ $\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x,t) = (-1)^{k/2}\frac{t^k e^{-t}\sin(tx)}{1+t^4}$ est dérivable par rapport à x

+ $\left|\frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial x^{k+1}}(x,t)\right| = \left|(-1)^{k/2}\frac{t^{k+1}e^{-t}\cos(tx)}{1+t^4}\right|$

$$\leqslant \frac{t^{k+1}}{1+t^4}e^{-t} = o\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$$

donc $t \longmapsto \frac{t^{k+1}}{1+t^4}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par dérivation sous le signe "intégrale", $f^{(k)}$ est dérivable et

$$f^{(k+1)}(x) = \int \frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial x^{k+1}}(x,t)dt \quad , \text{ d'où } (P_{k+1})$$

L'hérédité est ainsi démontrée, et la propriété (P_h) est vraie pour tout $h \in \mathbb{N}$.

3. D'après la question précédente,

$$f^{(4)}(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{1+t^4}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^4 e^{-t}\sin(xt)}{1+t^4}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(xt)\,dt$$

On pourrait s'inspirer de l'ex. précédent pour trouver une primitive exacte, ou bien remarquer que $\sin(xt) = \mathrm{Im}(e^{ixt})$. Alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(xt)\,dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{ixt}\,dt\right) = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{t(ix-1)}\,dt\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{t(ix-1)}}{ix-1}\right]_{t=0}^{+\infty}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-1}{ix-1}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{-(-ix-1)}{(ix-1)(-ix-1)}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{ix+1}{1+x^2}\right) = \frac{x}{1+x^2}.$$

$\boxed{\text{Ex 4}}$: Soit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$(x,t) \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$

1. Soit $0 < a < b$. Soit $x \in [a,b]$. Alors, pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|f(x,t)| = t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}$$

On voit qu'on a deux problèmes d'intégration : en $t=0$, et en $t=+\infty$. On coupe alors l'intégrale en deux :

si $t \in]0;1]$, $\ln(t) \leq 0$, donc

$$(x-1)\ln(t) \leq (a-1)\ln(t)$$

et $|t^{x-1}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t} \leq t^{a-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{a-1}$,

or, $a-1 > -1$, donc $t \mapsto t^{a-1}$ est intégrable sur $]0,1]$.

si $t \in [1;+\infty[$, $\ln(t) \geq 0$, donc

$$(x-1)\ln(t) \leq (b-1)\ln(t)$$

$\Rightarrow |t^{x-1}e^{-t}| \leq t^{b-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \to +\infty$,

$t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

~

~~en particulier, il existe $C>0$ tel que $\forall t \in [1;+\infty[$,~~

En posant $g(t) = \begin{cases} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t \in]0;1] \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$, on trouve donc

que $\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*$, $|f(x,t)| \leq g(t)$,

et g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

Le th. de continuité sous l'intégrale donne alors que Γ est continue (et bien définie) sur $[a,b]$. Le raisonnement étant valable pour tout $0<a<b$, on peut en déduire la continuité de Γ sur $]0;+\infty[$.

2. Soit $x \in]0;+\infty[$. $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$

par IPP $\longrightarrow$ $= \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$

$= 0 + x\Gamma(x)$

On montre que $\Gamma(n+1) = n!$ par récurrence.

* $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!$

* Supposons que $\Gamma(n+1) = n!$. Alors $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1)$

$= (n+1)\, n!$

$= (n+1)!$

L'hérédité est démontrée, et la propriété est donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. On fait le même raisonnement que dans 1. : Soient $0<a<b$, ~~[illegible]~~, alors $x \longmapsto f(x,t)$ est dérivable, et

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln(t)\, t^{x-1} e^{-t}$

si $t \in]0;1]$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq |\ln(t)|\, t^{a-1} e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} |\ln(t)|\, t^{a-1}$

intégrable sur $]0;1]$

(cf. ex. 5 TD1)

$t \in]1;+\infty[$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \ln(t)\, t^{b-1} e^{-t}$

$= o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ intégrable.

On peut donc dériver sous le signe intégrale, et $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)\, t^{x-1} e^{-t} dt$

$\forall x \in [a,b]$. On étend à $\mathbb{R}_+^*$ tout entier...