$\boxed{\text{TD 4}}$

Transformation de Laplace

Ex 1 : a) $f(t) = te^{6t}$, soit $s \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}(te^{6t})\,dt = \int_0^{+\infty} t e^{t(6-s)}\,dt \quad \text{converge ssi } s > 6.$$

Si $s > 6$, alors on remarque que

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} t\, e^{-t(s-6)}\,dt = \mathcal{L}[t \mapsto t](s-6),$$ donc il suffit de calculer la transformée de Laplace de $t \mapsto t$. Soit $s' > 0$, alors

$$\mathcal{L}[t \mapsto t](s') = \int_0^{+\infty} te^{-ts'}\,dt = -\frac{1}{s'}\underbrace{\left[te^{-ts'}\right]_0^{+\infty}}_{} + \frac{1}{s'}\int_0^{+\infty} e^{-ts'}\,dt$$

$$= 0 + \frac{1}{(s')^2}$$

d'où $\mathcal{L}f(s) = \dfrac{1}{(s-6)^2} \quad \forall s > 6.$

b) $f(t) = e^{-t}\sin(2t)$. Soit $s \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} \sin(2t)\, e^{-t(s+1)}\,dt = \mathcal{L}[t \mapsto \sin(2t)](s+1)$$ d'après la même remarque que dans la question précédente. Notons d'ailleurs que $\mathcal{L}f(s)$ converge ssi $s > -1$.

$$\mathcal{L}[t \mapsto \sin(2t)](s) = \int_0^{+\infty} \sin(2t)\, e^{-ts}\,dt = \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-ts/2}\,\frac{dt}{2} = \frac{\mathcal{L}[\sin](s/2)}{2}$$

d'où finalement : $$\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}[t \mapsto \sin(2t)](s+1)$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}[\sin]\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

Calculons $\mathcal{L}[\sin]$: soit $s' > 0$,

$$\mathcal{L}[\sin](s') = \int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-ts'}\,dt = \left[-\cos(t)\, e^{-ts'}\right]_0^{+\infty} - s'\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-ts'}\,dt$$

$$= 1 - s'\left(\left[\sin(t) e^{-ts'}\right]_0^{+\infty} + s'\int \sin(t) e^{-ts'}\,dt\right)$$

donc $\mathcal{L}[\sin](s') = 1 - (s')^2 \mathcal{L}[\sin](s')$,

c'est-à-dire $\mathcal{L}[\sin](s') = \dfrac{1}{1+(s')^2}$,

et finalement, $\mathcal{L}f(s) = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{1+\left(\frac{s+1}{2}\right)^2} = \dfrac{2}{4+(s+1)^2} \quad \forall\, s > -1.$

c) $f(t) = e^{\gamma t} \sin(\alpha t) \cos(\beta t) = \dfrac{e^{\gamma t}}{2}\Big(\sin(\alpha t + \beta t) + \sin(\alpha t - \beta t)\Big)$

$$= \frac{e^{\gamma t}}{2}\big(\sin((\alpha+\beta)t) + \sin((\alpha-\beta)t)\big)$$

D'après le cours, $\mathcal{L}f(s)$ existe pour $s > \gamma$. Dans ce cas, on a :

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}[t \mapsto \sin((\alpha+\beta)t)](s-\gamma) + \mathcal{L}[t \mapsto \sin((\alpha-\beta)t)](s-\gamma)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{(s-\gamma)^2+(\alpha+\beta)^2} + \frac{\alpha-\beta}{(s-\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2}\right).$$

<u>Ex 2:</u> $f(t) = e^{\gamma t}\cos(t)$

$f(0) = 1$, $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma < 0 \\ \text{pas de limite} & \text{si } \gamma \geq 0. \end{cases}$

f est C^1, donc le théorème de la valeur finale s'applique :

$$\lim_{s\to+\infty} s\,\mathcal{L}[f](s) = f(0) = 1$$

Pour la valeur initiale, le théorème s'applique lorsque $\gamma < 0$, et donne

$$\lim_{s\to 0} s\,\mathcal{L}f(s) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$$

Si $\gamma > 0$, $\mathcal{L}f$ n'est définie que sur $]\gamma ; +\infty[$, donc on ne peut pas calculer sa limite en 0.

Si $\gamma = 0$, alors le théorème ne s'applique pas, mais le calcul direct donne :

$$s\,\mathcal{L}f(s) = \frac{s}{s^2+1} \xrightarrow[s\to 0]{} 0$$

Ex 3 :

(a) On cherche f tq $\mathcal{L}f(s) = \dfrac{7s-25}{s^2-7s+12}$

On commence par décomposer la fraction rationnelle en éléments simples :

$Q(s) = s^2 - 7s + 12$, $\Delta = 49-48=1$, donc Q a pour racines

$$\frac{7+\sqrt{1}}{2} = 4 \quad , \quad \frac{7-\sqrt{1}}{2} = 3$$

$Q(s) = (s-4)(s-3)$, donc $\dfrac{7s-25}{s^2-7s+12} = \dfrac{A}{s-4} + \dfrac{B}{s-3} = \dfrac{(A+B)s-4B-3A}{s^2-7s+12}$

$$\begin{cases} A+B = 7 \\ -4B-3A = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=7 \\ A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=4 \\ A=3 \end{cases}$$

et donc $\mathcal{L}f(s) = \dfrac{3}{s-4} + \dfrac{4}{s-3} = \mathcal{L}\left(t \longmapsto 3e^{4t} + 4e^{3t}\right)$

donc $f(t) = 3e^{4t} + 4e^{3t}$

(b) $\mathcal{L}f(s) = \dfrac{2s-5}{s^2+4s+8}$ $\qquad \Delta = 16-32 = -16 < 0 \Rightarrow$ pas de racine réelle

$$s^2+4s+8 = (s+2)^2+4$$

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{2s-5}{(s+2)^2+4} = 2\,\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2} - \frac{9}{2}\,\frac{2}{(s+2)^2+2^2} = 2\mathcal{L}[t \mapsto e^{-2t}\cos(2t)](s) - \frac{9}{2}\mathcal{L}[t \mapsto e^{-2t}\sin(2t)](s)$$

donc $f(t) = 2e^{-2t}\cos(2t) - \dfrac{9}{2}e^{-2t}\sin(2t)$.

(c) $\mathcal{L}f(s) = \dfrac{s+4}{(s-2)^3} = \dfrac{s-2}{(s-2)^3} + \dfrac{6}{(s-2)^3} = \dfrac{1}{(s-2)^2} + \dfrac{6}{(s-2)^3}$

donc $f(t) = te^{2t} + 3t^2e^{2t}$

(d) $\mathcal{L}f(s) = \dfrac{s^2-3s+3}{s^3-3s^2+4s-2}$ $\qquad Q(s) = s^3-3s^2+4s-2$

on remarque que $Q(1)=0$, donc

$$(s-1) \mid Q(s)$$

$$\begin{array}{r|l} s^3 - 3s^2 + 4s - 2 & s-1 \\ \cline{2-2} -\ s^3 + s^2 \qquad\qquad & s^2 - 2s + 2 \\ \hline -2s^2 + 4s - 2 & \\ 2s^2 - 2s \qquad & \\ \hline 2s - 2 & \end{array}$$

$$Q(s) = (s-1)(s^2 - 2s + 2)$$
$$= (s-1)\left((s-1)^2 + 1\right)$$

donc $\dfrac{s^2 - 3s + 3}{Q(s)} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{Bs + C}{(s-1)^2 + 1}$

$$A = \left.\frac{s^2 - 3s + 3}{(s-1)^2 + 1}\right|_{s=1} = 1$$

$$B(1+i) + C = \frac{(1+i)^2 - 3(1+i) + 3}{i} = \frac{2i - 3 - 3i + 3}{i} = -1$$

donc $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, et

$\mathcal{L}f(s) = \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{(s-1)^2 + 1}$, donc $f(t) = e^t - e^t \sin(t)$.

Ex 4 : (γ) $f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = e^{3t}$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, soit $s \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{L}[f'' - 3f' + 2f](s) = \mathcal{L}[t \mapsto e^{3t}](s) = \dfrac{1}{s-3}$, donc

Or, $\mathcal{L}f'(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0) = s\mathcal{L}f(s) - 1$

$\mathcal{L}f''(s) = s\mathcal{L}f'(s) - f'(0)$

$= s^2\mathcal{L}f(s) - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}f(s) - s$

donc $s^2\mathcal{L}f(s) - s - 3(s\mathcal{L}f(s) - 1) + 2\mathcal{L}f(s) = \dfrac{1}{s-3}$

$\Leftrightarrow$ $(s^2 - 3s + 2)\mathcal{L}f(s) = s - 3 + \dfrac{1}{s-3} = \dfrac{(s-3)^2 + 1}{s-3}$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}f(s) = \dfrac{(s-3)^2 + 1}{(s^2 - 3s + 2)(s-3)}$

Remarquons que $(s^2 - 3s + 2) = (s-1)(s-2)$

donc $\mathcal{L}f(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$

$$A = \left.\frac{(s-3)^2+1}{(s-2)(s-3)}\right|_{s=1} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$B = \left.\frac{(s-3)^2+1}{(s-1)(s-3)}\right|_{s=2} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$C = \left.\frac{(s-3)^2+1}{(s-2)(s-1)}\right|_{s=3} = \frac{1}{2}$$

et finalement, $f(t) = \frac{5}{2}e^{t} - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$

(b) Soit f tq $f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = \cos(t)$, $f(0)=1$, $f'(0)=0$

Par transformation de Laplace, si $s \in \mathbb{R}$,

$$s^2\mathcal{L}f(s) - s - 2(s\mathcal{L}f(s) - 1) + 2\mathcal{L}f(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (s^2-2s+2)\mathcal{L}f(s) = s - 2 + \frac{s}{s^2+1} = \frac{(s-2)(s^2+1)+s}{s^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}f(s) = \frac{(s-2)(s^2+1)+s}{(s^2+1)(s^2-2s+2)} = \frac{(s-2)(s^2+1)+s}{(s^2+1)((s-1)^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{(s-1)^2+1}$$

$$Ai + B = \left.\frac{(s-2)(s^2+1)+s}{(s-1)^2+1}\right|_{s=i} = \frac{i}{(i-1)^2+1} = \frac{i}{1-2i} = \frac{i(1+2i)}{1+4}$$
$$= \frac{1}{5}(i-2)$$

$$C(1+i)+D = \left.\frac{(s-2)(s^2+1)+s}{(s^2+1)}\right|_{s=1+i} = \frac{(i-1)(2i+1)+1+i}{2i+1} = \frac{-2+i-2i-1+1+i}{2i+1}$$

$$= \frac{-2}{2i+1} = \frac{-2(-2i+1)}{4+1} = \frac{1}{5}(4i-2)$$
$$= \frac{1}{5}(4(i+1)-6)$$

Ainsi, $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{5}\left(\frac{s-2}{s^2+1} + \frac{4s-6}{(s-1)^2+1}\right)$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{s}{s^2+1} - 2\frac{1}{s^2+1} + 4\frac{(s-1)}{(s-1)^2+1} - 2\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)$$

d'où finalement, $f(t) = \frac{1}{5}\left(\cos(t) - 2\sin(t) + 4e^{t}\cos(t) - 2e^{t}\sin(t)\right)$.