Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Année 2018–2019
Printemps 2019

FICHE TD 5 – Transformation de Fourier

On rappelle que la transformée de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie par

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x)dx$$

Exercice 1 La fonction sinus cardinal, notée sinc, est définie par $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$, et $\operatorname{sinc}(0) = 1$. Soient $a \geq 0$, et $\chi_{[-a,a]}$ la fonction indicatrice sur $[-a, a]$.

1. Calculer la transformée de Fourier de $\frac{1}{2a}\chi_{[-a,a]}$.
2. Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(x)dx$.
3. Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2(x)dx$.
4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$
5. Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^4(x)dx$.

Exercice 2 Soient $k_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction absolument intégrable.

1. Quelle est la transformée de Fourier de $x \mapsto f(x)\cos(k_0 x)$ (en termes de la transformée de f).
2. Tracer le graphe de la transformée de Fourier de $x \mapsto \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)\cos(2\pi x)$.

Exercice 3 Soit $H(x)$ la fonction de Heavyside.

1. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = xe^{-x}H(x)$.
2. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = x^n e^{-x}H(x)$.
3. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = xe^{-|x|}$.

Exercice 4 Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\pi(x - \frac{1}{2})}.$$

Indication : on pourra utiliser le fait que $\cos(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

Exercice 5 On cherche une solution $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$-f''(x) + f(x) = e^{-2|x|}.$$

1. Montrer que, si f est solution alors $\hat{f}$ satisfait

$$\hat{f}(k) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1+k^2} - \frac{1}{4+k^2}\right)$$

2. En déduire $f(x)$.