TD 5 bis Transformée de Fourier

Exercice 1.

Pour $t > 0$, on pose $q_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$

Calculer la transformée de Fourier de q_t. En déduire que $q_t * q_s = q_{t+s}$.

Exercice 2.

Pour $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, on considère la fonction $g_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de $g_{0,1}$.
2. Calculer la transformée de Fourier de $g_{m,\sigma}$.

Exercice 3.

Soit $\alpha > 0$,, on pose $f(x) = e^{-\alpha|x|}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de f.
2. A l'aide de la formule de réciprocité, en déduire la transformée de Fourier de $x \to \frac{1}{1+x^2}$.
3. Calculer $f * f$, calculer ainsi la transformée de Fourier de $x \to \frac{1}{(1+x^2)^2}$.
4. Déterminer la transformée de Fourier de $x \to \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 4.

Soit l'équation intégrale, pour $0 < a < b$ et f absolument intégrable.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2} dt = \frac{1}{x^2 + b^2} \quad (1)$$

Exprimer cette équation sous forme d'une équation de convolution, déterminer la transformation de Fourier de f et en déduire f. On utilisera le résultat de l'exercice 3.1. et on pose pour $\alpha > 0$:

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2} \text{ et } f_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|}$$

1. Déterminer la transformée de Fourier de f_α, puis celle de g_α.
2. Résoudre (1).

Exercice 5.

On pose $f(x) = e^{-x} H(x)$ où H est la fonction de Heavyside.

1. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f.
2. Est-ce que $\hat{f}$ est absolument intégrable ? Vérifier que $\hat{f}$ est de carré intégrable.
3. A l'aide de la formule de Plancherel calculez :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+p^2} dp$$