

## FICHE TD 6 - Distributions

La fonction  $H = 1_{]0, +\infty[}$  est la fonction de Heaviside et  $1_{[a, b]}$  est l'indicatrice de l'intervalle  $[a, b]$ .  $\delta_a$  est la distribution de Dirac en  $a$ ,  $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$ .  $\text{III}_T$  désigne le peigne de Dirac de période  $T > 0$ ,  $\text{III}_T(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(nT)$ .

**Exercice 1** Déterminer les dérivées première  $T'$  et seconde  $T''$  des distributions :

1.  $T = T_{1_{[-1, 1]}}$ ,
2.  $T = T_{f 1_{[-1, 1]}}$ , avec  $f$  de classe  $C^\infty$ .
3. (\*)  $T = T_{[x]}$  où  $[x]$  le plus grand entier  $n \leq x$  (la partie entière de  $x$ )
4.  $T = T_{|x|}$ ,
5.  $T = T_{H(x) \sin(x)}$ ,
6.  $T = T_{H(x) \cos(x)}$ .

**Exercice 2** Calculer les primitives des distributions suivantes :

1.  $\delta'_0$ ,
2.  $T_{\text{sgn}(x)}$  avec  $\text{sgn}$  le signe de  $x$ ,
3.  $(1+x)\delta_a$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .
4.  $(1+x)^2(\delta'_0)$ ,
5. (\*) Le peigne de Dirac  $\text{III}_T$ .
6. (\*)  $T_{1/\sqrt{|x|}}$ .
7. (\*)  $(1+x)(\delta''_0)$ ,

**Exercice 3** Résoudre l'équation  $u' + au = T$  pour :

1.  $a(x) = x, T = \delta_0$ ,
2.  $a(x) = 1, T = H$ ,
3.  $a(x) = (1-x), T = \delta'_0$ ,

**Exercice 4** Déterminer les limites (au sens des distributions)

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{n 1_{[-1, 1]}(nx)}$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\delta_{-\frac{1}{n}} - \delta_{\frac{1}{n}})$ .
3. (\*)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{e^{x/n}}$ .
4. (\*)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{e^{-nx^2}}$ .
5. (\*)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} T_{e^{-nx^2}}$ .

**Exercice 5** Soit  $\delta_a$  la distribution de Dirac en  $a$ ,  $\delta_a(f) = f(a)$ . Déterminer :

1.  $(x-a)\delta_a$ ,
2.  $(x-a)\delta'_a$ ,
3.  $(x-a)^2\delta'_a$ .

**Exercice 6** Déterminer :

1.  $\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right) T_{e^{\lambda x} H(x)}$ ,
2.  $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right) T_{\frac{\sin(\omega x)}{\omega} H(x)}$ .

**Exercice 7** Déterminer les produits de convolution des distributions suivantes :

1.  $\delta_0 * T_{1_{[0, 1]}}$ ,
2.  $\delta'_0 * T_{\sin(x) H(x)}$ .
3.  $\delta_a * \delta_b$ .
4.  $\delta'_0 * H$
5. (\*)  $\text{III}_4 * T_{1_{[-1, 1]}}$