Université Claude Bernard Lyon 1
PCSI L2 UE MATH4
Année 2018-2019
Printemps 2019

FICHE TD 7 – Fonctions à une variable complexe I

Exercice 1 1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme polaire (aussi dite forme trigonométrique) : $(1+i)^{10}$, $(-1+i\sqrt{3})$, 10.

2. Décrire les ensembles $\{z \in \mathbb{C}; |z-\overline{z}| = 2\}$, $\{z \in \mathbb{C}; |z-2| = 1\}$, $\{z + 1/z : |z| = 1\}$.
3. Donner l'expression de la rotation de centre 1 et d'angle $\pi/4$.

Exercice 2 En vérifiant que la limite $\lim\limits_{\substack{w \to z \\ w \neq z}} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w}$ existe, déterminer si les fonctions suivantes sont holomorphes ou non :

$$(a)\ f(z) = z^2 \text{ sur } \mathbb{C}, \quad (b)\ f(z) = |z|^2 \text{ sur } \mathbb{C}, \quad (c)\ f(z) = \frac{1}{z} \text{ sur } \mathbb{C}^*$$

Exercice 3 Séries entières.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Quelle est sa somme ?
2. Développer la fonction $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ en série entière. Quel est son rayon de convergence ?
3. (*) Développer la fonction $\log(1-z)$ en série entière autour de 0. Ici, log est le logarithme principal et $z-1 \notin \mathbb{R}^+$. Quel est son rayon de convergence ?
4. (*) Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\dfrac{1}{z-a} = -\dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n$ pour tout $|z| < |a|$. Montrer que $\dfrac{1}{z-a} = \dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n$ pour tout $|z| > |a|$.

Exercice 4 Intégrales le long un chemin.

1. Donner un lacet γ qui trace un cercle de rayon $R > 0$ autour de 0 dans le sens direct. Puis calculer l'intégrale de $f(z) = \frac{1}{z}$ le long de γ, $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$.
2. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ le lacet $\gamma(t) = 25 + 24e^{2\pi i t^2}$. Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$.
3. Soit $\gamma : [0,3] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \begin{cases} Re^{\pi i t} & t \in [0,1] \\ R(t-2) & t \in [1,3] \end{cases}$. Calculer les intégrales $\int_\gamma \frac{1}{z-i}dz$ et $\int_\gamma \frac{1}{z+i}dz$ pour $0 < R < 1$ et $1 < R$.

Exercice 5 $\mathcal{C}$ est le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_\gamma z dz$ avec γ paramétrant $[0,1]$ avec $\gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1$.
2. $\int_\mathcal{C} z^n dz$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $\mathcal{C}$ le cercle unité.
3. $\int_\mathcal{C} e^z dz$.
4. $\int_\mathcal{C} e^{z^3} dz$.
5. $\int_0^{2\pi} e^{cos(\theta)} \cos(\theta + \sin(\theta))d\theta$
6. $\int_\mathcal{C} \frac{f(z)}{z}dz$ avec successivement : $f(z) = \cos(z), f(z) = \sin(z), f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z+2}$.

Exercice 6 Résidus des fonctions méromorphes. Déterminer les pôles et résidus des fonctions méromorphes suivantes :

$$(a)\ f(z) = \frac{z^2-4}{z^2-2z-3}, \quad (b)\ f(z) = \frac{e^z}{z^2}, \quad (c)\ f(z) = \frac{z}{\sin(\pi z)}, \quad (d)\ f(z) = \frac{\sin(z)}{(z-1)^2}.$$