$\boxed{\text{TD 7}}$:

Fonctions à une variable complexe I

Ex 1 :

1. On cherche ρ, θ, tq $1+i = \rho e^{i\theta}$. Alors

$$\rho = |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

et $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \iff \theta = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi, $(1+i)^{10} = (\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}})^{10} = 2^5\, e^{i\frac{10\pi}{4}} = 32\, e^{i\frac{\pi}{2}}$

$(= 32\, i)$

De la même manière, $(-1 + i\sqrt{3}) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$

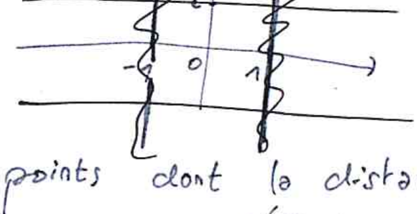
et $10 = 10\, e^{i0}$, c'est déjà la forme polaire.

2. * $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - \bar{z}| = 2\}$

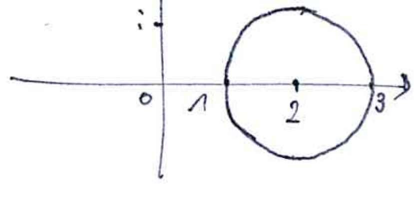
$z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$, donc $|z-\bar{z}| = 2 \iff |\mathrm{Re}(z)| = 1$

et $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-\bar{z}| = 2\}$ est la réunion des droites $D_1 = \{1 + iy,\ y \in \mathbb{R}\}$

et $D_{-1} = \{-1 + iy,\ y \in \mathbb{R}\}$.



* $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-2| = 1\}$ est l'ensemble des points dont la distance à 2 est égale à 1 ; c'est un cercle. On aurait pu l'écrire en termes de la partie réelle et imaginaire,
mais ce n'est pas la peine :



* $\left\{z + \frac{1}{z},\ |z| = 1\right\}$

$|z| = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \,/\, z = e^{i\theta}$.

Ainsi, $|z| = 1 \Rightarrow z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$, et donc

$$\{ z + \tfrac{1}{z} , |z|=1 \} = \{ 2\cos(\theta) , \theta \in \mathbb{R} \} = [-2;2] \subset \mathbb{R}.$$

Ex 2 :

(a) $f(z) = z^2$ sur $\mathbb{C}$

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} = \frac{z^2-w^2}{z-w} = \frac{(z-w)(z+w)}{z-w} = z+w \xrightarrow[w\to z]{} 2z,$$

donc f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(b) $f(z) = |z|^2$ sur $\mathbb{C}$.

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h} = \frac{(z+h)(\overline{z+h}) - z\bar{z}}{h}$$
$$= \frac{z\bar{h} + \bar{z}h + h\bar{h}}{h} = z\frac{\bar{h}}{h} + \bar{z} + \bar{h}$$

or, $\bar{z} + \bar{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, mais $\frac{\bar{h}}{h}$ n'admet pas de limite lorsque $h \to 0$.

Par exemple, $\varepsilon \in \mathbb{R}$: $\frac{\overline{\varepsilon i}}{\varepsilon i} = -1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -1$, $\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} = 1 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1$.

On en déduit que si $z \neq 0$, f n'est pas holomorphe en z, et f est holomorphe en 0.

(c) $f(z) = \frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}^*$.

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} = \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{w}}{z-w} = \frac{\frac{w-z}{zw}}{z-w} = -\frac{1}{zw} \xrightarrow[w\to z]{} -\frac{1}{z^2}$$

donc f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

Ex 3 :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, série entière de terme général $a_n z^n$, avec $a_n = 1$.

Le critère de d'Alembert donne : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc le rayon de convergence est $\frac{1}{1} = 1$.

Si $|z|<1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ est la limite de la série géométrique de raison z :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} z^n = \lim_{N\to+\infty} \frac{1-z^{N+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

2. On peut remarquer que $\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)$, et donc,

si $|z|<1$, $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n\geq 1} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$, et ~~le~~ rayon de convergence de cette série entière est toujours 1, puisque c'est la dérivée d'une série entière de RCV égal à 1.

3. On rappelle que $\frac{d}{dz}\log(z) = \frac{1}{z}$. Alors $\frac{d}{dz}\log(1-z) = -\frac{1}{1-z}$

si $|z|<1$, $= -\sum_{n\geq 0} z^n$.

Par primitivation des séries entières, on en déduit que

$$\log(1-z) = -\sum_{n\geq 0} \frac{z^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n}$$

et que cette série entière a un RCV de 1.

4. Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Alors $\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}}$, donc si $\left|\frac{z}{a}\right|<1$
$\Leftrightarrow |z|<|a|$,

on en déduit que $\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{a}\right)^n$.

De la même manière, si $|z|>|a|$, alors $\left|\frac{a}{z}\right|<1$ et

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{a}{z}\right)^n.$$

Ex 4 :

1. $\gamma : [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto Re^{it}$ est un lacet traçant un cercle de rayon R.

Soit $f(z) = \frac{1}{z}$. $\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}}(iRe^{it})dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = i2\pi.$$

2. $\gamma : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$
$\quad t \longmapsto 25 + 24e^{i2\pi t^2}$, $\gamma(0) = \gamma(1)$, donc c'est un lacet.

$f(z) = \frac{1}{z}$. Pour tout $t \in [0;1]$, $\mathrm{Re}(\gamma(t)) \geqslant 1$, donc $\gamma : [0;1] \longrightarrow U$, où $U = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Or, $\frac{1}{z}$ admet $z \longmapsto \log z$ comme primitive sur U, et donc $\int_\gamma f(z)dz = \log(\gamma(1)) - \log(\gamma(0)) = 0$.

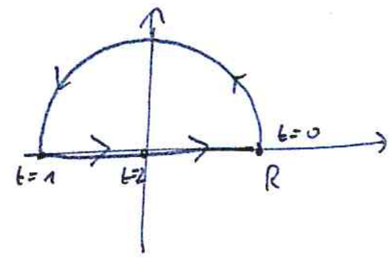
On peut le vérifier par le calcul:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{25 + 24e^{i2\pi t^2}} \left(24.(i2\pi)2t\, e^{i2\pi t^2}\right)dt$$

$$= \left[\log\left(25 + 24e^{i2\pi t^2}\right)\right]_0^1 = 0.$$

3. $\gamma : [0;3] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$t \longmapsto \begin{cases} Re^{\pi i t} & t \in [0;1] \\ R(t-2) & t \in [1;3] \end{cases}$$



γ est un lacet.

* $f(z) = \frac{1}{z+i}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Or,
$\gamma : [0;3] \longrightarrow \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > -\frac{1}{2}\}$, et $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > -\frac{1}{2}\}$ est un ouvert simplement connexe sur lequel f est définie. Alors f admet une primitive, et en particulier,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

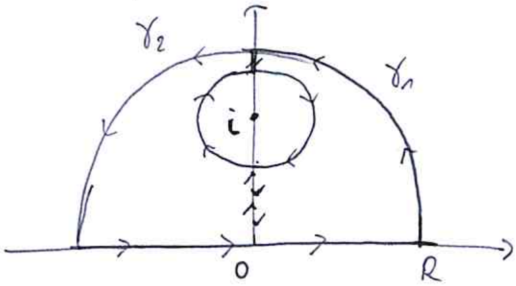
* $f(z) = \frac{1}{z-i}$, f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a alors deux cas: si $R < 1$, alors $\gamma : [0;3] \longrightarrow \underbrace{\{z \in \mathbb{C},\ 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq R < 1\}}_{U}$, et

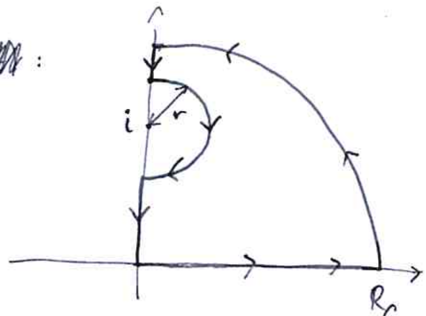
U est un ouvert simplement connexe sur lequel f est définie

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)dz.$

si $R > 1$: cette fois, le raisonnement ne tient plus.

Cependant, on peut définir les lacets suivants:





Cette fois, $\{z \in \mathbb{C} / Re(z) > \frac{1}{2}\} \setminus \mathcal{B}_{i,r}$, où $\mathcal{B}_{i,r}$ est la boule fermée de centre i et de rayon $r = \frac{R-1}{2}$, est un ouvert simplement connexe sur lequel f est bien définie, et donc $\int_{\gamma_1} f(z)dz = 0$.

De la même manière, $\int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$.

De plus, si on note γ_3 un lacet décrivant $\mathcal{C}_{i,r}$ dans le sens indirect, on a:

$$0 = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz$$

La question 1. implique que $\int_{\gamma_3} f(z)dz = -2i\pi$ (on peut le montrer avec un changement de variable)

Finalement: $\int_{\gamma} f(z)dz = +i\,2\pi$.

Ex 5 :

1. Soit γ un chemin paramétrant $[0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$.

Alors $\int_{\gamma} z\,dz = \int_0^1 \gamma(t)\gamma'(t)\,dt = \frac{1}{2}[\gamma^2(t)]_0^1 = \frac{1}{2}$.

2. $\gamma : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto e^{i2\pi t}$ est une paramétrisation du cercle unité dans le sens direct.

Alors $\int_C z^n dz = \int_{\gamma} z^n dz = \int_0^1 (e^{i2\pi t})^n\, i2\pi\, e^{i2\pi t}\,dt$

$$= i2\pi \int_0^1 e^{i(n+1)2\pi t}\,dt$$

Ainsi, si $n \neq -1$, alors

$$\int_{\mathcal{C}} z^n dz = i2\pi \left[\frac{e^{i(n+1)2\pi t}}{i(n+1)2\pi} \right]_0^1 = 0$$

et si $n = -1$, $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} z^{-1} dz = i2\pi$.

3. $z \longmapsto e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et donc admet une primitive holomorphe. Il en découle que

$$\int_{\mathcal{C}} e^z dz = 0 \quad , \quad \text{car } \mathcal{C} \text{ est un lacet.}$$

4. $z \longmapsto e^{z^3}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (par composition), donc

$$\int_{\mathcal{C}} e^{z^3} dz = 0.$$

5. On a montré dans 3 que $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} e^z dz = 0$.

Soit $\gamma : [0;2\pi] \longrightarrow \mathcal{C}$, $\theta \longmapsto e^{i\theta}$, c'est une paramétrisation de $\mathcal{C}$.

Alors $$0 = \int_{\mathcal{C}} e^z dz = \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + i\theta} d\theta$$

en prenant la partie imaginaire,

$$0 = \operatorname{Im}\left(i \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta) + i(\theta + \sin(\theta))} d\theta \right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(e^{\cos(\theta) + i(\theta + \sin(\theta))} \right) d\theta$$

$$0 = \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(\theta + \sin(\theta)) \, d\theta .$$

6. $\dfrac{\cos(z)}{z} = \dfrac{\cos(z) - 1}{z} + \dfrac{1}{z}$. Or, $z \longmapsto \dfrac{\cos(z) - 1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, et $\dfrac{\cos(z) - 1}{z} \xrightarrow[z \to 0]{} -\sin(0) = 0$. On en déduit que $\dfrac{\cos(z) - 1}{z}$ est en fait holomorphe sur $\mathbb{C}$, et par conséquent,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\cos(z) - 1}{z} dz = 0 \quad , \quad \text{d'où} \quad \int_{\mathcal{C}} \frac{\cos(z)}{z} dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz = i2\pi.$$

De la même manière, $\frac{\sin(z)}{z} \xrightarrow[z\to 0]{} \cos(0) = 1$, donc 0 est une fausse singularité, et $z \longmapsto \frac{\sin(z)}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Ainsi, $\int_{\mathcal{C}} \frac{\sin(z)}{z} dz = 0.$

Finalement, $z \longmapsto \frac{e^{\pi z}}{z+2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$, donc sur $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > -2\}$. C'est un ouvert simplement connexe, et $\mathcal{C}$ est inclus dans cet ensemble. Alors

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{\pi z}}{z+2} dz = 0.$$

Ex 6 :

a) $f(z) = \frac{z^2-4}{z^2-2z-3}$ $\qquad z^2-2z-3 = (z+1)(z-3)$,

donc $\quad f(z) = \frac{(z-2)(z+2)}{(z+1)(z-3)}$.

f présente deux pôles simples, en -1 et 3, et donc

$$\text{Rés}(f, -1) = \lim_{z\to -1} (z+1) f(z) = \frac{-3 \cdot 1}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Rés}(f, 3) = \lim_{z\to 3} (z-3) f(z) = \frac{1 \cdot 5}{4} = \frac{5}{4}.$$

b) $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ $\qquad e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, donc f admet un pôle double en 0.

$$\text{Rés}(f, 0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(z^2 f(z)\right) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(e^z\right) = \lim_{z\to 0} e^z = 1.$$

On aurait aussi pu écrire $f(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$, donc $\text{Rés}(f,0) = a_{-1} = 1$.

c) $f(z) = \frac{z}{\sin(\pi z)}$, $\qquad \sin(\pi z) = 0 \iff \pi z \in 2\pi\mathbb{Z}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \iff z \in 2\mathbb{Z}$

En 0, $\frac{z}{\sin(\pi z)} = \left(\frac{\sin(\pi z) - \sin(0)}{z - 0}\right)^{-1} \xrightarrow[z\to 0]{} \left(\frac{d}{dz} \sin(\pi z)\Big|_{z=0}\right)^{-1}$

$$= \left(\pi \cos(0)\right)^{-1} = \frac{1}{\pi}$$

donc 0 n'est pas un pôle de f.

Par contre, les $2k$, $k \in \mathbb{Z}^*$, sont des pôles. Déterminons les résidus : soit $k \in \mathbb{Z}^*$.

$$(z-2k)\,f(z) = \frac{z\,(z-2k)}{\sin(\pi z)} = z\,\frac{z-2k}{\sin(\pi z)-\sin(2k\pi)}$$

$$\xrightarrow[z\to 2k]{} 2k\left(\pi\cos(2k\pi)\right)^{-1}$$

$$= \frac{2k}{\pi}$$

La limite existe, donc les pôles sont simples, et

$$\text{Rés}(f, 2k) = \frac{2k}{\pi}.$$

d) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{(z-1)^2}$ $\sin(1) \neq 0$, donc f admet un pôle double en 1, et alors

$$\text{Rés}(f,1) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left((z-1)^2 f(z)\right)$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} \sin(z)$$

$$= \cos(1).$$