$\boxed{\text{TD 8 -}}$

Fonctions à une variable complexe II

Ex 1 :

(a) $$f(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)}$$

f admet 3 pôles simples : $+2$, i et $-i$.

$$\text{Rés}(f, +2) = \lim_{z \to 2} (z-2)f(z) = \frac{4}{5}$$

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{i^2}{(i-2)(2i)} = \frac{1}{2}\,\frac{i}{i-2} = \frac{1}{2}\,\frac{i(-i-2)}{5} = \frac{1-2i}{10}$$

$$\text{Rés}(f, -i) = \frac{(-i)^2}{(-i-2)(-2i)} = \frac{1}{2}\,\frac{i}{i+2} = \frac{1}{2}\,\frac{i(2-i)}{5} = \frac{1+2i}{10}$$

(b) $g(z) = \dfrac{1}{z(z+2)^3}$ admet un pôle simple en 0 et un pôle triple en -2

$$\text{Rés}(g, 0) = \lim_{z \to 0} z g(z) = \frac{1}{8}$$

$$\text{Rés}(g, -2) = \lim_{z \to -2} \frac{1}{2!}\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \left((z+2)^3 g(z)\right)$$

$$= \lim_{z \to -2} \frac{1}{2}\,\frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{z^2}\right) = \lim_{z \to -2} \frac{1}{z^3} = -\frac{1}{8}$$

(c) $h(z) = \dfrac{z e^{2019 z}}{(z-3)^2}$ admet un pôle double en 3.

$$\text{Rés}(h, 3) = \lim_{z \to 3} \frac{d}{dz}\left(z e^{2019 z}\right) = e^{3 \cdot 2019}(1 + 3 \times 2019)$$

$$= 6058 e^{6057}$$

(d) $k(z) = \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)} = \dfrac{z(z-2)}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)}$ un pôle double en -1, deux pôles simples en $\pm 2i$.

$$\text{Rés}(k, -1) = \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz}\,\frac{z^2-2z}{z^2+4} = \lim_{z \to -1}\left(\frac{(2z-2)(z^2+4) - (z^2-2z)\cdot 2z}{(z^2+4)^2}\right)$$

$$= \lim_{z \to -1}\left(\frac{z^2(-2+4) + 8z - 8}{(z^2+4)^2}\right) = \frac{+2-16}{25}$$

$$\text{Rés}(k,-1) = \frac{-14}{25}$$

$$\text{Rés}(k,2i) = \frac{(2i)^2 - 2\cdot 2i}{(2i+1)^2\cdot 4i} = \frac{-4-4i}{(-3+4i)4i} = \frac{i-1}{4i-3} = \frac{(i-1)(-3-4i)}{3^2+4^2}$$

$$= \frac{i+7}{25}$$

$$\text{Rés}(k,-2i) = \frac{(-2i)^2 - 2\cdot(-2i)}{(-2i+1)^2(-4i)} = \overline{\text{Rés}(k,2i)} = \frac{-i+7}{25}.$$

Ex 2 :

(a) * γ : cercle de centre 0 et de rayon $\frac{3}{2}$ dans le sens direct.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \text{Rés}(f,i)\,\text{ind}_\gamma(i) + \text{Rés}(f,-i)\,\text{ind}_\gamma(-i)$$

$$= \frac{1-2i}{10} + \frac{1+2i}{10} = \frac{1}{5}$$

* γ : cercle de rayon 10. Dans ce cas, le point $z=2$ est à l'intérieur du cercle, et donc $\text{ind}_\gamma(2)=1$, d'où

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \text{Rés}(f,i)\,\text{ind}_\gamma(i) + \text{Rés}(f,-i)\,\text{ind}_\gamma(-i) + \text{Rés}(f,2)\,\text{ind}_\gamma(2)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1.$$

(b) * γ de rayon 1 : $\text{ind}_\gamma(0)=1$; $\text{ind}_\gamma(-2)=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)dz = \text{Rés}(g,0) = \frac{1}{8}$$

* γ de rayon 3 $\Rightarrow$ $\text{ind}_\gamma(0)=1$, $\text{ind}_\gamma(-2)=1$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int g(z)dz = \text{Rés}(g,0) + \text{Rés}(g,-2) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0.$$

(c) * γ de rayon 1, $\text{ind}_\gamma(3)=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)dz = 0$$

* γ de rayon 2019 $\Rightarrow$ $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)dz = \text{Rés}(h,3) = 658e^{6057}$

(d) * γ de rayon $\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $\text{ind}_\gamma(-1)=1$, $\text{ind}_\gamma(\pm 2i)=0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma k(z)dz = \text{Rés}(k,-1) = -\frac{14}{25}$$

* γ de rayon 5

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma k(z)dz = -\frac{14}{25} + \frac{i+7}{25} + \frac{-i+7}{25} = 0$$

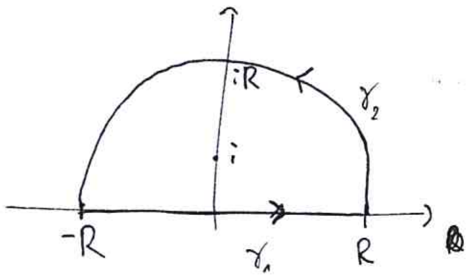
Ex 3 :

a) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, on cherche à calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

L'intégrale est convergente (critère de Riemann), donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx .$$

On regarde l'intégrale le long de γ, le demi-cercle au centre 0 et de diamètre sur l'axe des abscisses, pour $R > 1$.



$$\gamma_1(t) = t, \quad t \in [-R;R]$$
$$\gamma_2(t) = Re^{i\pi t}, \quad t \in [0,1].$$

f admet deux pôles simples, $\pm i$. C'est une fonction méromorphe, on peut donc appliquer le théorème des résidus :

$$\mathrm{ind}_\gamma(+i) = 1, \quad \mathrm{ind}_\gamma(-i) = 0 \qquad (R > 1)$$

$$\text{Rés.}(f, i) = \lim_{z\to i} \frac{z-i}{1+z^2} = \lim_{z\to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

Ainsi, $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2i} = \pi, \quad \forall R>1.$

Remarquons maintenant que $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2}dt \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}dt$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_0^1 \frac{R\, i\pi\, e^{i\pi t}}{1+R^2e^{i2\pi t}}dt$$

Or, si $t \in [0;1]$, $\left|\frac{R\, i\pi e^{i\pi t}}{1+R^2e^{i2\pi t}}\right| \leq R\pi \frac{1}{R^2-1}$

donc $\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

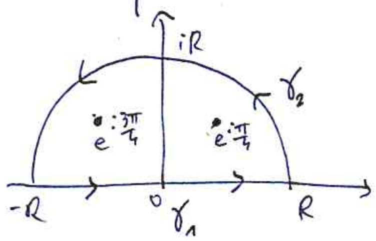
d'où finalement

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{R\to+\infty} \int_\gamma f(z)dz = \pi.$$

b) On fait la même étude avec $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$

Cette fois, la fonction a 4 pôles simples : $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $e^{i\frac{5\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

On regarde, à nouveau, l'intégrale de f le long de γ, qu'on décompose en γ_1 et γ_2, pour $R > 1$.



Alors $\mathrm{ind}_\gamma(e^{i\frac{\pi}{4}}) = \mathrm{ind}_\gamma(e^{i\frac{3\pi}{4}}) = 1$,
$\mathrm{ind}_\gamma(e^{i\frac{5\pi}{4}}) = \mathrm{ind}_\gamma(e^{i\frac{7\pi}{4}}) = 0$,

et le th. des résidus s'applique. $\mathrm{Rés}(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}} (z - e^{i\frac{\pi}{4}}) f(z)$

$$\mathrm{Rés}(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{1}{(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{3\pi}{4}})} \cdot \frac{1}{(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{5\pi}{4}})} \cdot \frac{1}{(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{7\pi}{4}})}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{(1+i-(-1+i))(1+i-(-1-i))(1+i-(1-i))} = \frac{2\sqrt{2}}{2\cdot(2+2i)\cdot 2i}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{(1+i)i} = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i)$$

$$\mathrm{Rés}(f, e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \frac{2\sqrt{2}}{(-1+i-(1+i))(-1+i-(-1-i))(-1+i-(1-i))} = \frac{2\sqrt{2}}{-2\cdot 2i\cdot(-2+2i)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{(1-i)i}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}(+1-i)$$

On en déduit que $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i) + \frac{\sqrt{2}}{8}(+1-i)\right)$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Comme dans la question 1,

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^4}\,dt \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,dt$$

et $\displaystyle\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| = \left|\int_0^1 \frac{R\pi i e^{i\pi t}}{1+R^4 e^{4i\pi t}}\,dt\right| \leq \int_0^1 \frac{\pi R}{1+R^4}\,dt = \frac{\pi R}{1+R^4} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

(c) $f(z) = \dfrac{e^{ipz}}{1+z^2}$. f présente deux pôles, i et $-i$

$\mathrm{ind}_\gamma(i) = 1$, $\mathrm{ind}_\gamma(-i) = 0$ dès que $R > 1$.

On commence par calculer le résidu de f en i :

$$\text{Rés}(f, i) = \lim_{z \to i} \frac{e^{ipz}}{z+i} = \frac{e^{-p}}{2i}.$$

Le théorème des résidus s'applique, et donc

$$\int_\gamma f(z)dz = \pi e^{-p}.$$

De plus $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ipt}}{1+t^2} dt \xrightarrow[R \to +\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipt}}{1+t^2} dt$

et $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_0^1 \frac{e^{ipRe^{i\pi t}}}{1+R^2e^{i2\pi t}} Ri\pi e^{i\pi t} dt$

Or, si $t \in [0,1]$,

$$\left| \frac{e^{ipRe^{i\pi t}}}{1+R^2e^{i2\pi t}} Ri\pi e^{i\pi t} \right| \leq \frac{R\pi}{R^2-1} \left| e^{ipR(\cos(\pi t) + i\sin(\pi t))} \right|$$

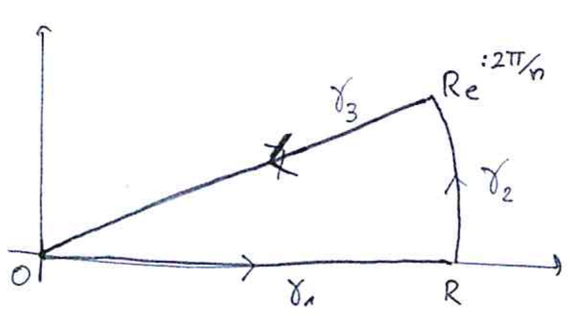
$$= \frac{R\pi}{R^2-1} e^{-pR\sin(\pi t)}$$

$$\leq \frac{R\pi}{R^2-1} \quad \text{car } \sin(\pi t) \geq 0.$$

Ainsi, $\displaystyle\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq \int_0^1 \frac{R\pi}{R^2-1} dt = \frac{R\pi}{R^2-1} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$, d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipt}}{1+t^2} dt = \pi e^{-p}.$$

(d). $f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$. On regarde l'intégrale de f sur $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, $n \geq 2$. pour $R > 1$.



$\gamma_1(t) = t \quad , \quad t \in [0;R]$

$\gamma_2(t) = Re^{it} , \; t \in [0; \frac{2\pi}{n}]$

$\gamma_3(t) = (R-t)\,e^{i2\pi/n} \quad , \quad t \in [0;R].$

Les pôles de f sont les z tels que $z^n = -1$, donc les $e^{i\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}}$, $k \in [\![0; n-1]\!]$. Le seul pôle dont l'indice par rapport à γ est non nul est $z_0 = e^{i2\pi/n}$.

$$\mathrm{Ind}_\gamma(e^{i2\pi/n}) = 1.$$

$\text{Rés}(f, z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{z - z_0}{1+z^n}$. En notant $g(z) = z^n$,

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)} = \frac{1}{g'(z_0)} = \frac{1}{n z_0^{n-1}}$$

$$\text{Rés}(f, z_0) = \frac{z_0}{n z_0^n} = -\frac{1}{n} e^{i\frac{\pi}{n}}$$

Passons maintenant au calcul de l'intégrale.

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^R \frac{1}{1+t^n} dt$$

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| = \left| \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iRe^{it}}{1+R^n e^{int}} dt \right| \leqslant \int_0^{2\pi/n} \frac{R}{1-R^n} dt \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$$

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_0^R \frac{-e^{i2\pi/n}}{1+(R-t)^n e^{i2\pi}} dt = -e^{i2\pi/n} \int_0^R \frac{1}{1+t^n} dt$$

Le théorème des résidus donne :

$$\int_\gamma f(z)dz = -\frac{2i\pi}{n} e^{i\frac{\pi}{n}}$$

et $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz \xrightarrow[R \to +\infty]{} (1 - e^{i2\pi/n}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n} dt = -e^{i\frac{\pi}{n}} \left(e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}} \right) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n} dt$

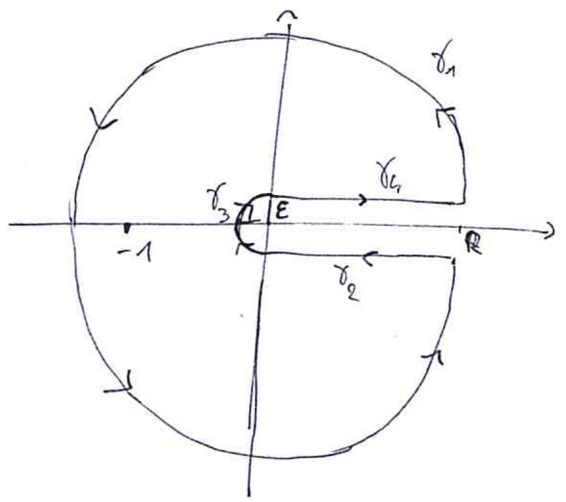
$$= -e^{i\frac{\pi}{n}} . 2i \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n} dt$$

et donc finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n}\,dt = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

e) $f(z) = \dfrac{1}{z^a(1+z)}$, où $z^a = e^{a\ln z}$, et on choisit pour le log la détermination suivante : si $z = re^{i\theta}$, $r>0$ et $\theta \in [0;2\pi[$, $\ln(z) = \ln(r) + i\theta$.

Cette détermination est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. On regarde alors l'intégrale de f sur le lacet suivant, avec $0<\varepsilon<1<R$:



$\gamma_1(t) = Re^{it}$, $t\in[\arctan(\frac{\varepsilon}{R}), 2\pi-\arctan(\frac{\varepsilon}{R})]$

$\gamma_2(t) = (\sqrt{R^2-\varepsilon^2}-t) - i\varepsilon$, $t\in[0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$

$\gamma_3(t) = e^{i(\frac{3\pi}{2}-t)}$, $t\in[0;\pi]$

$\gamma_4(t) = t+i\varepsilon$, $t\in[0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$.

f admet une unique singularité isolée sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, c'est -1, et c'est un pôle simple. Alors

$$\text{Rés}(f,-1) = \frac{1}{(-1)^a} = e^{-a(0+i\pi)} = e^{-ia\pi}.$$

Le théorème des résidus donne :

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4} f(z)dz = 2i\pi e^{ia\pi}.$$

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)dz\right| = \left|\int_{\arctan(\frac{\varepsilon}{R})}^{2\pi-\arctan(\frac{\varepsilon}{R})} \frac{iRe^{it}}{R^a e^{iat}(1+Re^{it})}\,dt\right| \leq \int_{\dots}^{2\pi-\dots} \frac{R^{1-a}}{1-R}\,dt$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^{2\pi} \frac{R^{1-a}}{1-R}\,dt \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{-1}{\left(\sqrt{R^2-\varepsilon^2} - t - i\varepsilon\right)^a \left(1+\sqrt{R^2-\varepsilon^2} - t - i\varepsilon\right)}\,dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{-1}{(t-i\varepsilon)^a(1+t-i\varepsilon)}\,dt$$

Or, $$(t-i\varepsilon)^a = \exp\Big(a\big(\ln((t^2+\varepsilon^2)^{1/2}) + i\,\underbrace{\arg(t-i\varepsilon)}_{\in [0;2\pi]}\big)\Big)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \exp\big(a(\ln(t) + i2\pi)\big)$$

$$= t^a e^{i2a\pi}$$

Par convergence dominée, comme $|f(t\pm i\varepsilon)| \leqslant |f(t)|$,

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^R \frac{-e^{-i2a\pi}}{t^a(1+t)}\,dt \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-2ia\pi}}{t^a(1+t)}\,dt$$

De la même manière,

$$\int_{\gamma_4} f(z)dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^R \frac{1}{t^a(1+t)}\,dt \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^a(1+t)}\,dt$$

$$\left|\int_{\gamma_3} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{-i\varepsilon e^{i(\frac{3}{2}\pi - t)}}{e^{ia(\frac{3}{2}\pi-t)}\,\varepsilon^a\left(1+\varepsilon e^{i(\frac{3}{2}\pi-t)}\right)}\,dt\right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\varepsilon^{1-a}}{1-\varepsilon}\,dt$$

$$= \frac{\pi\varepsilon^{1-a}}{1-\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Finalement, lorsque $\varepsilon \to 0$ puis $R \to +\infty$, on trouve :

$$\left(1-e^{-2ia\pi}\right)\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^a(1+t)}\,dt = 2i\pi\, e^{-ia\pi}$$

donc $$\left(e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}\right)\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^a(1+t)}\,dt = 2i\pi$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^a(1+t)}\,dt = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$