Sujets de khôlles

Simon Zugmeyer

Table des matières

1 2016–2017 : Calcul différentiel et analyse complexe, semestre de printemps

1.1 Khôlle du 2 mars 2017

1.1.1 Questions de cours

- Énoncer le théorème d'inversion globale.
- Énoncer le théorème des fonctions implicites.
- Énoncer le théorème d'inversion locale.
- Énoncer le théorème des accroissements finis entre deux espaces vectoriels normés.

1.1.2 Exercices

Exercice 1. Soient a, b des réels tels que $|ab| < 1$. Montrer que

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x + a\sin(y), y + b\sin(x)) \end{array}$$

réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Exercice 2. Montrer que l'équation

$$\sin(y) + y + e^x = 1$$

définit implicitement $y \in \mathbb{R}$ comme une fonction φ de $x \in \mathbb{R}$ au voisinage de $(0, 0)$. Donner le développement limité de φ en 0 à l'ordre 3.

Exercice 3. On considère

$$f : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^{-1}. \end{array}$$

Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 4. Montrer que le système

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t = 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^2 = 0 \end{cases}$$

admet, lorsque t est petit et sur un voisinage de $(0, -1, 1)$, une unique solution s'écrivant $(x, y, z) = f(t)$. Déterminer la dérivée de f en 0.

1.1.3 Problèmes

Exercice 5. Soient E, F des espaces de Banach, $f : E \to F$ une fonction de classe C^1 telle qu'il existe une constante $k > 0$ vérifiant, pour tout $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| \geqslant k\|x - y\|$. On suppose de plus que pour tout $x \in E$, $Df(x)$ est surjectif.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $Df(x)$ est inversible.
2. Montrer que $f(E)$ est un fermé.
3. En déduire que f réalise un C^1-difféomorphisme entre E et F.

Exercice 6. On considère

$$f: \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ M & \longmapsto & (\mathrm{tr}(M), \mathrm{tr}(M^2), \ldots, \mathrm{tr}(M^n)). \end{array}$$

1. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle. Montrer qu'elle est C^1.

2. Montrer que l'ensemble des matrices M telles que $Df(M)$ soit de rang maximal correspond exactement à l'ensemble des matrices telles que leur polynôme minimal soit de degré n, c'est-à-dire

$$\{M \in M_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}(Df(M)) = n\} = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ \deg(\pi_M) = n\}.$$

3. En conclure que $\{M \in M_n(\mathbb{R}),\ \deg(\pi_M) = n\}$ est ouvert.

Exercice 7. On considère

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x^2 + y^2, y^2), \end{array}$$

et pour $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = f^{(k-1)} \circ f$ et $f^{(0)} = id$. Soit alors $\Omega = \{v \in \mathbb{R}^2,\ \lim_{k\to+\infty} f^{(k)}(v) = 0\}$

1. Montrer que $v \in \Omega$ si, et seulement si, $f(v) \in \Omega$.

2. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\|v\| < \delta \implies \|Df(v)\| < 1/2$. En déduire que 0 est dans l'intérieur de Ω.

3. En conclure que Ω est ouvert.

Exercice 8. Les coefficients d'un polynôme unitaire dépendent de manière lisse de ses racines. Qu'en est-il de la réciproque ? On se propose d'étudier la question pour les polynômes de degré 3. Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a, b, c, x) & \longmapsto & x^3 + ax^2 + bx + c, \end{array}$$

et soit $\Omega = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ X^3 + aX^2 + bX + c$ admet trois racines réelles distinctes$\}$.

1. Soit $(a_0, b_0, c_0, x_0) \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(a_0, b_0, c_0, x_0) = 0$. Montrer que si x_0 n'est pas une racine double de $P(X) = X^3 + a_0X^2 + b_0X + c_0$, alors il existe un voisinage ouvert U de (a_0, b_0, c_0) et une application $x : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que

$$x(a_0, b_0, c_0) = x_0 \quad \text{et} \quad f(a, b, c, x(a, b, c)) = 0$$

pour tout $(a, b, c) \in U$.

2. Montrer que la condition « *x_0 n'est pas une racine double de* $P(X) = X^3 + a_0X^2 + b_0X + c_0$ » est en fait une condition nécessaire à l'existence d'une telle fonction $x : U \to \mathbb{R}$ décrite dans la question précédente.

3. Déduire de la question 1. que Ω est ouvert.

4. En conclure que $\Theta : \Omega \to \mathbb{R}^3,\ (a, b, c) \mapsto (x, y, z)$, où $x < y < z$ sont les racines du polynôme $X^3 + aX^2 + bX + c$, est un C^1-difféomorphisme de Ω sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

1.2 Khôlle du 23 mars 2017

1.2.1 Questions de cours

- Définir une fonction holomorphe, énoncer les équations de Cauchy-Riemann et leur lien avec la $\mathbb{C}$-différentiabilité.
- Définir ce qu'est une série entière, ainsi que son rayon de convergence.
- Énoncer la formule d'Hadamard et le critère de d'Alembert pour une série entière $\sum a_n z^n$.
- Énoncer le théorème d'inversion globale.

1.2.2 Exercices

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n la n-ième décimale de α. Déterminer, en fonction de α, le rayon de convergence ainsi que le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$.

Exercice 2. Soit $\sum a_n z_n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 0$, et soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum P(n)a_n z^n$ en fonction de P. Que peut-on dire du domaine de convergence ? *Indication : on pourra montrer le résultat pour* $P(X) = X^k$.

Exercice 3. Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$; déterminer son rayon de convergence.

Exercice 4. Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2(x+2)}$; calculer son rayon de convergence.

1.2.3 Problèmes

Exercice 5. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$. On suppose que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n R^n$ converge. On se propose de montrer que la convergence est uniforme sur le segment $[0, R]$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\rho_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k R^k$.

1. Soient $x \in [0, R[$ et $N \in \mathbb{N}^*$. En effectuant une transformation d'Abel, montrer que

$$R_{N-1}(x) = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n x^n = \rho_N \left(\frac{x}{R}\right)^N + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \rho_n \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n-1}\right).$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Déduire de la question précédente qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $N \geqslant n_0$, alors $|R_N(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [0, R[$.

3. Conclure quant à la convergence uniforme.

4. (*Application*) En explicitant la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$, calculer la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Indication : pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

Exercice 6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe, dont on suppose que $\sum n a_n$ est absolument convergente.

1. Vérifier que le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1. Pour $|z| < 1$, on note alors $f(z)$ sa somme.

2. On suppose que $\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n| < |a_1|$. En déduire qu'alors, f est injective. *Indication : pour* $z, z' \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *, on a la relation :*

$$z'^n - z^n = (z' - z) \sum_{k=0}^{n-1} z'^k z^{n-k-1}.$$

3. Montrer que $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (définie par sa série entière $\sin(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$) est injective de $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 7. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la fonction $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ existe pour tout $x \in]-1, 1[$, et $\lim_{x\to 1} f(x) = \alpha \in \mathbb{C}$. On se propose de démontrer que $\sum_{n\geqslant 0} a_n = l$ sous certaines conditions.

1. Dans le cas général, le résultat n'est pas vrai. Donner un contre-exemple.
2. On suppose dans cette question que les a_n sont tous réels et positifs. Démontrer le résultat.
3. On suppose maintenant que $a_n = o(1/n)$ lorsque n tend vers l'infini. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $\delta_N = |l - \sum_{n=0}^{N} a_n|$; le but est de montrer qu'à partir d'un certain rang, $\delta_N < \varepsilon$.

(a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\delta_N \leqslant |l - f(x)| + \sum_{n=0}^{N} |a_n|(1 - x^n) + \sum_{n\geqslant N+1} |a_n| x^n.$$

(b) En déduire que pour un x_N bien choisi,

$$\delta_N \leqslant |l - f(x_N)| + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} n|a_n| + \sup_{n\geqslant N+1} (n|a_n|),$$

puis conclure.

Exercice 8. Une involution d'un ensemble E est une application $f : E \to E$ vérifiant $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Pour $n \geqslant 1$, on note I_n le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$, et on pose $I_0 = 1$.

1. Montrer, si $n \geqslant 2$, que
$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$$
2. Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge si $x \in]-1, 1[$. On note $S(x)$ sa somme.
3. Montrer, pour $x \in]-1, 1[$, que
$$S'(x) = (1 + x)S(x)$$
4. En déduire une expression de $S(x)$, puis une expression de I_n.

1.3 Khôlle du 27 mai 2017

1.3.1 Questions de cours

– Énoncer le théorème des résidus.
– Énoncer le principe des zéros isolés, et celui du maximum.
– Définir les trois types de singularités isolées pour les fonctions holomorphes, et les illustrer par des exemples.

1.3.2 Exercices

Exercice 1. Soit P un polynôme non nul, et soit γ un chemin simple et fermé contenant tous les zéros de P dans son intérieur. Calculer

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} z \frac{P'(z)}{P(z)} dz.$$

Exercice 2. Classifier les singularités, et calculer les résidus lorsque cela est possible, des fonctions suivantes :

1. $z \mapsto \dfrac{1}{e^z - 1}$,

2. $z \mapsto \dfrac{z}{e^{1/z} - 1}$.

Exercice 3. Soient $A_1, \dots, A_n$ des points de $\mathbb{R}^2$, et soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert connexe borné non vide. On considère la fonction f qui à un point $M \in \mathbb{R}^2$ associe le produit des distances de M à A_i. Montrer que lorsque M décrit $\overline{U}$, f atteint son maximum sur ∂U.

Exercice 4. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que, pour un certain $M > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(z)| < M(1 + |z|^n)$$

quel que soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus n.

1.3.3 Problèmes

Exercice 5. Soit $D = D(0,1)$. On note $\mathrm{Aut}(D)$ l'ensemble des bijections f de D dans lui-même, telles que f et f^{-1} soient holomorphes. Le but de cet exercice est de déterminer cet ensemble.

1. Soit f une fonction holomorphe sur D telle que $f(0) = 0$, et $f(D) \subset D$. Montrer qu'alors, pour tout $z \in D$, $|f(z)| \leqslant |z|$. (*Indication : considérer* $z \mapsto f(z)/z$.)

2. Montrer qu'en outre, si $|f'(0)| = 1$, ou s'il existe $z \in D \backslash \{O\}$ tel que $|f(z)| = |z|$, alors f est une rotation du disque.

3. Soit $a \in D$. On considère l'application φ_a, définie sur D par

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Montrer que $\varphi_a(D) \subset D$, que $\varphi_a \circ \varphi_{-a} = \mathrm{id}_D$, et donc que $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(D)$.

4. À l'aide des deux premières questions, conclure que

$$\mathrm{Aut}(D) = \{z \mapsto \varphi_a(\lambda z), |\lambda| = 1, a \in D\}.$$

Exercice 6. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash A$, où $A = \{z_1, \dots, z_p\}$ est fini, telle que

$$\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty,$$

et que les z_i sont des pôles de f. On note m_i leur multiplicité respective.

1. Soit $P(z) = (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_p)^{m_p}$. Montrer que $f_1 = Pf$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

2. On considère $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C},\ z \mapsto f_1(1/z)$. Montrer que g est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et que 0 en est un pôle.

3. On suppose que f_1 n'est pas un polynôme. Montrer qu'alors, 0 est nécessairement une singularité essentielle de g.

4. En conclure que f est une fraction rationnelle.

Exercice 7. (Une inégalité de convexité, le théorème des trois cercles d'Hadamard) Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U contenant la couronne fermée $C = \{z \in \mathbb{C}, r \leqslant |z| \leqslant R\}$, où $0 < r < R$. Pour $\rho \in [r, R]$; on considère $M(\rho) = \sup |f(z)|, |z| = \rho$. Dans la suite, on fixe $\rho \in [r, R]$.

1. Montrer qu'il existe $\theta \in [0,1]$ tel que $\rho = r^\theta R^{1-\theta}$.

2. Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

$$\rho^p M(\rho)^q \leqslant \max(r^p M(r)^q, R^p M(R)^q).$$

3. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\rho^\alpha M(\rho) \leqslant \max(r^\alpha M(r), R^\alpha M(R)).$$

4. En déduire que $M(\rho) \leqslant M(r)^\theta M(R)^{1-\theta}$.

Exercice 8. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et f une fonction holomorphe sur Ω et non constante. Le but de ce problème est de montrer que f est ouverte.

1. Soit $a \in \Omega$. Justifier qu'il existe $r > 0$ tel que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ et pour tout $z \in C(a,r)$, $f(z) \neq f(a)$.

2. On note γ le cercle $C(a,r)$ parcouru dans le sens trigonométrique. Montrer que

$$\mathrm{ind}_{f\circ\gamma}(f(a)) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - f(a)} dz = n_Z > 0,$$

où n_Z est le nombre de zéros de $z \mapsto f(z) - f(a)$ dans $D(a,r)$ (comptés avec leur multiplicité).

3. Soit W la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(f \circ \gamma)$ contenant $f(a)$, et soit $V = D(a,r) \cap f^{-1}(W)$. Justifier que V et W sont ouverts.

4. Montrer que $\xi \mapsto \mathrm{ind}_{f\circ\gamma}(\xi)$ est constante sur W, et en conclure grâce à la question 2.

2 2017–2018 : Mesure et intégration, semestre d'automne

2.1 Khôlle du 26 septembre 2017

2.1.1 Programme

Rappels sur les suites réelles, limites inférieures et supérieures, valeurs d'adhérence. Opérations élémentaires sur les ensembles : réunion, intersection, différences, produits cartésiens. Rappels sur les fonctions : image directe et réciproque, injections, surjections.

2.1.2 Questions de cours

- Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$
- Donner la définition d'une valeur d'adhérence.
- Donner la définition de la partition d'un ensemble.
- Donner la définition d'un produit cartésien d'ensembles.
- Donner la définition d'une injection, d'une surjection, d'une bijection.

2.1.3 Exercices

Exercice 1 ($*$). Soient X, Y, Z trois ensembles, et $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ des fonctions.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective. Que peut-on dire sur f ? Si $g \circ f$ est surjective, que peut-on dire sur g ?

2. On suppose maintenant que $Z = X$ et que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 2 ($*$). Soient E et F deux ensembles et $f : E \mapsto F$ une fonction. Montrer que f est injective si, et seulement si, pour toutes parties A et A' de E,

$$f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').$$

Exercice 3 ($*$). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\liminf_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n > 0$. Montrer que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} > 0.$$

Exercice 4 ($**$). Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des nombres premiers.

1. Montrer que $\limsup_{n\to+\infty} p_{n+1} - p_n = +\infty$.

2. Montrer que $\liminf_{n\to+\infty} p_{n+1} - p_n = 2$. *Note : ceci est la conjecture des nombres premiers jumeaux, du huitième problème de Hilbert. En l'état actuel des choses, on sait qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p + 2$ soit produit d'au plus deux facteurs premiers.*

Exercice 5 ($**$). Calculer la limite supérieure et inférieure des suites suivantes :

1. $u_n = \cos(\pi\sqrt{n})$
2. $u_n = n \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\frac{\pi}{2}\right)$
3. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
4. $u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$

Exercice 6 (∗∗∗)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle. En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite donnée par

$$u_n = \cos(\pi\sqrt{n}).$$

Exercice 7 (∗∗∗)**.** 1. Montrer que si u est une suite réelle bornée et qu'elle admet *exactement* une valeur d'adhérence, alors u est convergente. Fournir un contre-exemple lorsque u n'est pas bornée.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + u_{2n} = 0.$$

Montrer que la suite converge vers 0. *Indication : montrer que si a est une valeur d'adhérence de la suite, alors $-2a$ l'est aussi.*

Exercice 8 (∗∗∗)**.** *(Théorème du point fixe de Knaster-Tarski)* Soit E un ensemble, et $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une fonction croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$. Montrer que f admet un point fixe $X = f(X)$. *Grosse indication : considérer la réunion des parties de E incluses dans leur image par f.*

Exercice 9 (∗∗∗)**.** Soit E un ensemble. Montrer que E est infini si, et seulement si, pour toute fonction f de E dans lui-même, il existe $A \subset E$ tel que $f(A) = A$. *Indication : dans un sens, penser aux n-cycles, et dans l'autre, fixer $x \in E$ et considérer la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.*

2.2 Khôlle du 3 octobre 2017

2.2.1 Programme

Même programme que la semaine dernière, avec en plus les ensembles dénombrables, et les tribus.

2.2.2 Questions de cours

- Qu'est-ce qu'un ensemble dénombrable ?
- Dans quels cas une réunion d'ensembles dénombrables est-elle dénombrable ?
- Donner une condition suffisante sur $f : A \to \mathbb{N}$ pour que A soit au plus dénombrable. Même question avec $f : \mathbb{N} \to A$.
- Définir une algèbre de partie, une tribu, une topologie.
- Qu'est-ce que la tribu borélienne ?

2.2.3 Exercices

Exercice 1 (∗)**.** Soit $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'intervalles réels, ouverts et disjoints deux à deux. Montrer que A est nécessairement au plus dénombrable. En déduire qu'un ouvert $I \subset \mathbb{R}$ admet une quantité au plus dénombrable de composantes connexes.

Exercice 2 (∗)**.** Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans lui-même n'est pas dénombrable.

Exercice 3 (∗)**.** Déterminer la tribu engendrée par la famille $\{\{n, n+1, n+2\},\ n \in \mathbb{N}\}$ dans $X = \mathbb{N}$, puis dans $X = \mathbb{Z}$.

Exercice 4 ($*$)**.** Soit X un ensemble et $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ deux sous-ensembles de $\mathcal{P}(X)$. Montrer que si $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$, alors $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$.

Exercice 5 ($**$)**.** Soit A un ensemble non vide, et a un élément de A. Démontrer si A et $A\backslash\{a\}$ sont équipotents lorsque

1. A est fini ;
2. A est au moins dénombrable (*indication : commencer par le cas où A est dénombrable.*)

En déduire que $[0,1]$ et $]0,1[$ sont équipotents.

Exercice 6 ($**$)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Par monotonicité, f admet une limite à droite et à gauche en tout $x \in]a,b[$, qu'on note $f(x^-)$ et $f(x^+)$. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f, c'est-à-dire $\{x \in [a,b]\,,\ f(x^-) \neq f(x^+)\}$ est au plus dénombrable.

Exercice 7 ($**$)**.** Soit X un ensemble, et $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ une collection quelconque de parties de X. Montrer que quel que soit $A \in \sigma(\mathcal{E})$, il existe une sous-collection dénombrable $D \subset \mathcal{E}$ telle que $A \in \sigma(D)$. En d'autres termes, il s'agit de montrer que

$$\bigcup_{\substack{D\subset\mathcal{E} \\ D \text{ dénombrable}}} \sigma(D) = \sigma(\mathcal{E})$$

Exercice 8 ($***$)**.** Soit A un ensemble. Montrer que A et $\mathcal{P}(A)$, l'ensemble des parties de A, ne sont pas équipotents. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer $X = \{x \in A, x \notin f(x)\}$ pour une bijection f.*

Exercice 9 ($***$)**.** (Vu en TD) Un réel $x \in \mathbb{R}$ est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme à coefficients rationnels, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(x) = 0$. Montrer que l'ensemble des nombres réels algébriques est dénombrable. *Indication : quelles sont les racines de polynômes rationnels de degré 1 ? Indication suivante : montrer que l'ensemble des racines de polynômes de degré au plus $d \in \mathbb{N}$ est dénombrable.*

Exercice 10 ($***$)**.** Montrer qu'une tribu est soit finie, soit non dénombrable. *Indication : construire une collection dénombrable d'ensembles non vides disjonts.*

2.3 Khôlle du 9 et 10 octobre 2017

2.3.1 Programme

Grosso modo comme la semaine précédente, avec en plus quelques notions de fonctions mesurables. La définition des mesures a été vue en cours.

2.3.2 Questions de cours

– Qu'est-ce qu'une fonction borélienne ?

– Donner la définition d'une tribu produit.

– Donner la définition d'une mesure positive.

Exercice 1 ($*$)**.** Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Montrer que si pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\{x,\ f(x) \geqslant r\}$ est mesurable, alors f est mesurable ($\mathbb{R}$ étant muni de la tribu borélienne).

Exercice 2 (∗∗∗)**.** Soit X un ensemble non dénombrable infini, et soit $\mathcal{M}$ la famille de tous les ensembles $E \subset X$ tels que E ou E^c soit au plus dénombrable. On définit alors $\mu : \mathcal{M} \to 0, 1$ de la manière suivante : si E est au plus dénombrable, $\mu(E) = 0$, et sinon, $\mu(E) = 1$. Montrer que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré, et décrire les fonctions mesurables de $(X, \mathcal{M})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(R))$, ainsi que leurs intégrales.

Exercice 3 (∗∗∗)**.** On considère la suite d'ensembles définie par récurrence de la manière suivante :

$$F_0 = [0, 1]\,, \quad F_{n+1} = \frac{F_n}{3} + \frac{F_n + \{2\}}{3}.$$

1. Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On pose $K = \bigcap_{n\geqslant 0} F_n$.
2. Montrer que K est compact, donc mesurable, et de mesure de Lebesgue nulle.
3. En utilisant par exemple l'écriture en base 3 des éléments de F, montrer que F est équipotent à $2^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$.

2.4 Khôlle du 17 octobre 2017

2.4.1 Programme

Fonctions mesurables. Mesure de Lebesgue, ensemble de Cantor, complétion des mesures.

2.4.2 Questions de cours

– Qu'est-ce que la tribu image par une fonction ? La tribu engendrée ?
– Définir la tribu produit. Que peut-on dire sur le produit de deux tribus boréliennes ?
– Rappeler le théorème d'existence de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

2.4.3 Exercices

Exercice 1 (∗)**.** Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Montrer que les ensembles $\{x \in X,\ f(x) = g(x)\}$ et $\{x \in X,\ f(x) < g(x)\}$ sont mesurables.

Exercice 2 (∗)**.** Soit μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que si $A \subset \mathbb{R}^d$ est d'intérieur non vide, alors $\mu(A) > 0$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3 (∗∗)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à gauche. Montrer que f est borélienne. *Indication : on peut voir f comme la limite simple de fonctions en escalier, comme par exemple $f_n(x) = f([nx]/n)$.*

Exercice 4 (∗∗∗)**.** (Théorème d'Egoroff). Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré fini, f, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ presque partout lorsque $n \to +\infty$. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$A_{n,j} = \{x,\ |f(x) - f_n(x)| \geqslant 1/j\}, \quad B_{n,j} = \bigcup_{p\geqslant n} A_{p,j}.$$

1. Montrer les $B_{n,j}$ sont mesurables, et que pour un j fixé, $\lim_{n\to+\infty} \mu(B_{n,j}) = 0$.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que $\mu(A) \leqslant \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur $X\backslash A$ lorsque $n \to +\infty$. *Indication : on pourra chercher A sous la forme $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} B_{n_j,j}$.*
3. Donner un contre exemple lorsque $\varepsilon = 0$.
4. Donner un contre exemple lorsque $\mu(X) = +\infty$.

2.5 Khôlle du 23 octobre 2017

2.5.1 Programme

Tout ce qui a déjà été vu sur les mesures et les tribus, intégrale de Riemann, intégrale de Lebesgue des fonctions étagées

2.5.2 Questions de cours

– Donner la définition d'une fonction étagée mesurable, et son intégrale de Lebesgue contre une mesure μ.
– Rappeler les propriétés géométriques (invariances ?) et topologiques (régularités ?) de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

2.5.3 Exercices

Exercice 1 $(*)$**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que f' est mesurable.

Exercice 2 $(**)$**.** Soit μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et A un borélien tel que $\mu(A) > 1$.

1. Montrer que les ensembles $(A - n) \cap [0, 1[$ ne peuvent pas être deux à deux disjoints.
2. En déduire qu'il existe $a, b \in A$ tels que $a - b \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 $(***)$**.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $\mathcal{M}$ la tribu engendrée par f à partir de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $g : X \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{M}$-mesurable si, et seulement si, il existe une fonction mesurable $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g = h \circ f$. *Indication : on pourra commencer par prouver le résultat pour les fonctions g étagées.*

2.6 Khôlle du 6-7 novembre 2017

2.6.1 Programme

Intégration des fonctions mesurables positives, théorème de Beppo-Levi (convergence monotone)

2.6.2 Questions de cours

– Définir la Riemann-intégrabilité.
– Définir l'intégrale de Lebesgue d'une fonction μ-mesurable et positive.
– Énoncer le théorème de Beppo-Levi.

2.6.3 Exercices

2.7 Khôlle du 13-14 novembre 2017

2.7.1 Programme

Intégration des fonctions mesurables à valeurs complexes, interversion série intégrale, lemme de Fatou, mesures à densité.

2.7.2 Questions de cours

- Énoncer le lemme de Fatou et celui de Beppo-Levi.
- Définir l'intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable et positive, puis d'une fonction mesurable à valeurs complexes.

2.7.3 Exercices

Exercice 1. (Autour du lemme de Fatou.) Fournir des exemples de cas d'inégalité stricte dans le lemme de Fatou.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives intégrables, dont la suite des intégrales est bornée. On suppose que la suite converge simplement vers f, montrer qu'alors f est intégrable elle aussi.

Exercice 2 (∗). Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \to \mathbb{C}$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}$, $\int_A f d\mu = 0$. Montrer que $f = 0$ μ-presque partout.

Exercice 3 (∗). Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, $p \geqslant 1$, et $f : X \to \mathbb{C}$ telle que $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$. Montrer que pour tout $t > 0$, on a :

$$\mu(\{x \in X, \ |f(x|) \geqslant t\}) \leqslant \frac{1}{t^p} \int_X |f|^p d\mu.$$

Exercice 4 (∗). Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de fonctions réelles mesurables et positives. Montrer qu'elle admet une limite simple f mesurable, et que, en supposant que $\int_X f_0 d\mu < +\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Montrer que si $\int_X f_0 d\mu = +\infty$, alors la conclusion n'est plus forcément vraie.

Exercice 5 (∗∗). (Théorème de continuité.) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable par rapport à μ. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mu(A) < \delta \implies \int_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

Indication : on pourra commencer par le cas où f est bornée. Ensuite, considérer, pour $M > 0$, $X_M = \{x, \ |f(x)| \leqslant M\}$, et écrire $A = (A \cap X_M) \cup (A \cap X_M^c)$.

Exercice 6 (∗∗). Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables et positives. On suppose qu'elle converge simplement vers f, et que $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

Indication : on pourra utiliser le fait que $2\min(a, b) = a + b - |a - b|$, et le lemme de Fatou.

2.8 Khôlle du 20 novembre 2017

2.8.1 Programme

Convergence dominée ; mesure image, théorème de transfert.

2.8.2 Questions de cours

- Énoncer le théorème de convergence dominée.
- Définir une mesure image, et énoncer le théorème de transfert.

2.8.3 Exercices

Exercice 1 (∗∗)**.** Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction μ-intégrable. Discuter, en fonction du paramètre $\alpha > 0$, de

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X n \ln\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) d\mu.$$

Indication : montrer que si $\alpha \geqslant 1$*, alors* $\ln(1 + x^\alpha) \leqslant \alpha x$.

Exercice 2 (∗∗)**.** 1. (Théorème de continuité.) Soit X un espace mesuré, Y un espace topologique, et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

- pour tout $x \in X$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue ;
- pour tout $y \in Y$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est mesurable ;
- il existe $h : X \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour tout $(x, y) \in X \times Y$, $|f(x, y)| \leqslant h(x)$.

Montrer que sous ces hypothèses, $y \mapsto \int_X f(x, y)dx$ est continue.

2. Application : montrer que la fonction

$$F(y) = \int_0^1 \frac{1}{x^3 + y^2} dx$$

est continue sur $]0, +\infty[$

2.9 Khôlle du 27-28 novembre 2017

2.9.1 Programme

Probabilités, loi d'une variable aléatoire ; intégrales de Riemann généralisées, séries numériques et mesure de comptage ; continuité et dérivabilité d'une intégrale à paramètre, intégrales multiples.

2.9.2 Questions de cours

- Énoncer le théorème de continuité sous le signe intégrale.
- Théorème de Tonelli (pour les fonctions à valeurs dans $[0, +\infty]$) ? Théorème de Fubini (pour les fonctions à valeurs complexes) ?
- Donner la définition d'une variable aléatoire et de sa loi.

2.9.3 Exercices

Exercice 1 (∗)**.** Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la limite de

$$\int_0^1 f(t^n)dt$$

lorsque $n \to +\infty$. Que dire du cas où f est seulement supposée continue en 0 et intégrable ?

Exercice 2 (*)**.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue qui converge vers $l \in \mathbb{C}$ en $+\infty$. Étudier la limite de la suite suivante, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{n} \int_0^n f(t)dt.$$

Exercice 3 (**)**.** Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable pour la mesure de comptage μ, et soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans lui-même. Montrer qu'alors

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \int_{\mathbb{N}} f \circ \sigma d\mu.$$

Exercice 4 (**)**.** On considère la fonction suivante, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$, et y est de classe C^1.
2. Calculer $F'(x)$, et en déduire une expression de $F(x)$.

2.10 Khôlle du 12 décembre 2017

2.10.1 Programme

Intégrales multiples, changements de variables. Espaces L^p, inégalité de Hölder, Cauchy-Schwarz, Minkowski.

2.10.2 Questions de cours

- Énoncer le théorème de changement de variables.
- Lorsque u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$, A un borélien, que dire de $\lambda_d(u(A))$? Donner une idée de preuve.
- Définir les espaces L^p.

2.10.3 Exercices

Exercice 1 (**)**.** On considère la fonction $f : \Omega =]0, 1[^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

2. Calculer les intégrales itérées $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)dx\right) dy$ et $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)dy\right) dx$. La fonction f est-elle intégrable sur Ω ?

Exercice 2 (**)**.** Calculer $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda(x)$. *Indication : montrer que* $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d\lambda(x, y) = I^2$ *et effectuer un changement de variable.*

Exercice 3 (**$\ast\ast$**)**.** Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, et soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions monotones de même sens telles que $f, g, fg \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$. Montrer qu'alors

$$\int_{\mathbb{R}} fg d\mu \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}} f d\mu\right)\left(\int_{\mathbb{R}} g d\mu\right).$$

Indication : considérer la fonction $F(x, y) = (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$.

Exercice 4 ($\ast\ast$)**.**

1. Soit $x \geqslant 0$. Montrer que $\lfloor x \rfloor = \sum_{n \geqslant 1} \chi_{[n,+\infty[}(x)$.
2. En déduire que pour toute fonction mesurable et posiive $f : E \to \mathbb{R}_+$,

$$\int \lfloor f \rfloor d\mu = \sum_{n \geqslant 1} \mu(\{x \in E, f(x) \geqslant n\}).$$

3. Montrer que si f est intégrable, alors $\sum_{n \geqslant 1} \mu(\{x \in E, f(x) \geqslant n\}) < +\infty$. La réciproque est-elle vraie ? Trouver une condition nécessaire et suffisante sur μ pour qu'elle le soit.

3 2017–2018 : Cursus prépa, Math III, semestre d'automne

3.1 Khôlle du 11 octobre 2017

3.1.1 Programme

Analyse : 27 septembre 2017 : Séries de référence : séries géométriques, séries de Riemann, série définissant l'exponentielle (les séries de Bertrand n'ont pas été vues). Séries numériques à termes quelconques : critère de Cauchy sur les sommes partielles (la règle de Cauchy avec la racine n-ième ne sera pas vue), série absolument convergente, la convergence absolue entraîne la convergence, série semi-convergente. Critère spécial des séries alternées (avec encadrement et signe de la somme, majoration de la valeur absolue du reste). Transformation d'Abel : principe général puis règle d'Abel (deux versions).

04 octobre 2017 : Fin des séries numériques : théorème de sommation des relations de comparaisons (o et O) et théorème de sommation des équivalents (application pour retrouver le théorème de Césaro), produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. Fonctions de plusieurs variables : norme sur $\mathbb{R}^n$, inégalité de Cauchy-Schwarz (dans $\mathbb{R}^n$) et norme euclidienne, distance associée à la norme euclidienne. Définitions des boules ouvertes, fermées et sphères. Parties bornées, caractérisation d'une partie bornée par inclusion dans une boule fermée. Parties ouvertes : définition d'un voisinage, d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Algèbre : CM 6 (02/10) : Suite du chap. 3 : Proposition (Si F stable par u alors P_u est divisible par P_{u_F}) ; Corollaire (Pour toute valeur propre, la dimension de l'espace propre est entre 1 et la multiplicité). Diagonalisabilité : Définition d'un endo diagonalisable (si sa matrice est diagonale dans une certaine base ou encore s'il existe une base de vecteurs propres) ; Si le polyn. caract est scindé à racines simples alors l'endo est diagonalisable ; On a équivalence entre (1) être diagonalisable (2) E est la somme des espaces propres (3) P_u est scindé et la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre assocée ; Définition de matrice diagonalisable ; Lien entre endom et matrice diagonalisable ; plusieurs exemples traités avec calcul de la matrice de passage ; Trigonalisabilité : définition d'un endo trigonalisable.

3.1.2 Questions de cours

- Énoncer la règle de d'Alembert pour les séries numériques.
- Énoncer la règle de Cauchy.
- Qu'est-ce qu'une série géométrique ? À quelle condition est-elle convergente ?
- Définir la notion de série convergente et absolument convergente. Donner un exemple de série semi-convergente.
- Énoncer le critère spécial des séries alternées.
- Donner trois conditions suffisantes de diagonalisabilité. Lesquelles sont aussi nécessaires ?
- Qu'est-ce que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme ?

3.1.3 Exercices

Exercice 1 ($*$)**.** Soient deux séries numériques convergentes de terme général strictement positif u_n et v_n respectivement. Montrer que les séries suivantes sont convergentes :

$$\sum \max(u_n, v_n), \quad \sum \sqrt{u_n v_n}, \quad \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Exercice 2 ($*$)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Montrer que les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

Exercice 3 ($*$)**.** Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

On rappelle que $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2 = \pi^2/6$.

Exercice 4 ($**$)**.** Étudier la convergence de la série numérique suivante :

$$\sum_{n\geqslant 1} \sin(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Indication : penser au théorème d'Abel.

Exercice 5 ($**$)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive décroissante, et α un réel positif. On suppose que la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha u_n$$

est convergente. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha+1} u_n = 0.$$

Exercice 6 ($**$)**.** Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^2 = -\operatorname{Id}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Montrer que $(a, f(a))$ est libre.

2. On suppose dans cette question que $n \geqslant 3$. Soit $b \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tel que $(a, f(a), b)$ est libre. Montrer que $\operatorname{Vect}(a, f(a))$ et $\operatorname{Vect}(b, f(b))$ sont en somme directe.

3. En déduire qu'il existe $a_1, \ldots, a_p$ tels que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Vect}(a_i, f(a_i)).$$

4. En déduire que n est pair. Retrouver ce résultat à l'aide du déterminant.

Exercice 7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, et φ_A définie par

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A : & M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & AM. \end{array}$$

Calculer la trace et le déterminant de φ_A.

Exercice 8. Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$, et $B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\delta, \delta]$, $A + xB \in GL_n(\mathbb{R})$.

3.2 Khôlle du 18 octobre 2017

3.2.1 Programme

Algèbre : CM 7 (09/10) : Suite du chap. 3 : Définition d'une matrice trigonalisable ; Caractérisation (u trigonalisable ssi P_u est scindé) ; Conséquence : trace = somme des v.p. et déterminant=produit des vp si P_u est scindé dans $\mathbb{K}$; Méthode algorithmique pour trigonaliser une matrice ; traitement de deux exemples ; Nilpotence : définition ; u nilpotent ssi u trigonalisable avec des 0 sur la diagonale ; le polyn. caractéristique est alors X^n. Début du Chapitre 4 (Réduction, polyn. minimal et projecteurs spectraux) : Polynômes d'endomorphismes (et de matrices) : définition.

*Analyse :*11 octobre 2017 : Propriétés des ouverts (réunion, intersection finie, produit cartésien). Limites de suites vectorielles (dans $\mathbb{R}^n$) : suite bornée, suite convergente, opérations sur les suites convergentes (combinaisons linéaires, produit par une suite réelle, convergence si et seulement si les suites coordonnées (réelles) convergent). Limites de fonctions $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$: point adhérent, définition et unicité de la limite, caractérisation séquentielle de la limite, opérations usuelles (combinaisons linéaires, produit par une fonction à valeurs réelles, composée, convergence à l'aide des fonctions coordonnées). Brève extension de la définition de la limite à l'infini (avec x ou $\|x\|$ tendant vers l'infini, quand la limite est infinie lorsque cela est possible).

3.2.2 Questions de cours

- Définition d'une matrice diagonalisable ? Trigonalisable ?
- Définition et polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente.
- Définir la notion de limite dans $\mathbb{R}^n$, et expliciter la caractérisation séquentielle.
- Donner la définition d'un ouvert et d'un fermé dans $\mathbb{R}^n$.

3.2.3 Exercices

Exercice 1 $(*)$**.** Diagonaliser la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 2 $(*)$**.** 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est diagonalisable, alors A^2 l'est aussi.

2. Réciproquement, supposons que A^2 est diagonalisable. Montrer, à l'aide d'un contre exemple, qu'alors A ne l'est pas forcément. Établir une condition suffisante sur le spectre de A^2 pour que A soit diagonalisable.

Exercice 3 $(**)$**.** Discuter de la diagonalisabilité, et trouver une matrice diagonale correspondante, des matrices suivantes de $M_n(\mathbb{K})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & \iddots & \\ n & & (0) \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 $(*)$**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Montrer que f est continue si, et seulement si, quel que soit $U \subset \mathbb{R}^p$ ouvert, $f^{-1}(U)$ est ouvert. En déduire que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5 (**)**.** Exhiber un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ tel que A, $\mathring{A}$, $\bar{A}$, $\bar{\mathring{A}}$, $\mathring{\bar{A}}$, $\bar{\mathring{\bar{A}}}$, $\mathring{\bar{\mathring{A}}}$ soient tous différents.

Exercice 6 (**)**.** On considère une série convergente, de terme général u_n positif. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans lui-même. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n = \sum_{n\geqslant 0} u_{\sigma(n)}.$$

Indication : on pourra commencer par montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_{\sigma(n)}$ *est convergente et de somme inférieure à* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Exercice 7 (***)**.** On considère une série, de terme général $u_n \in \mathbb{R}$, telle que $\sum |u_n| = +\infty$ et $\sum u_n$ converge.

1. Soit $A = \{n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N},\ u_n < 0\}$. Montrer que A et B sont infinis, puis que $\sum_{n\in A} u_n$ et $\sum_{n\in B} u_n$ divergent.
2. Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit par récurrence la fonction $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ suivante :

$$\sigma(0) = 0, \text{ et, pour } n \geqslant 1, \sigma(n) = \begin{cases} \min(A\backslash\{\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)\}) & \text{si } \sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)} \leqslant \alpha \\ \min(B\backslash\{\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)\}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que σ est une permutation de $\mathbb{N}$.

3. Finalement, montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} u_{\sigma(n)} = \alpha.$$

Exercice 8 (***)**.** Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une permutation. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge, tandis que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)n}$ converge.

3.3 Khôlle du 25 octobre 2017

3.3.1 Programme

Algèbre : CM 8 (16/10) : $K[u]$ est stable par somme et composée. Polynôme annulateur (définition). Th. de Cayley-Hamilton. Polynôme minimal (c'est le polyn annulateur de plus bas degré unitaire) : existence et unicité et il divise tout autre polynôme annulateur. Les racines du polyn minimal sont les val propres. Lemme de noyaux. Critère de diagonalisabilité (le polyn minimal est scindé à racines simples).

Analyse : ? ? Limites et continuité...

3.3.2 Questions de cours

- Théorème de Cayley-Hamilton
- Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, donner la définition d'un polynôme annulateur, ainsi que du polynôme minimal.
-

3.3.3 Exercices

Exercice 1 (∗). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{R}\backslash(\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\alpha\})$ est un ouvert.

Exercice 2 (∗∗). Étudier, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de la suite

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + k^\alpha) .$$

(On ne demande pas la limite explicite.)

Exercice 3 (∗∗). On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$. Montrer que la suite est convergente, et que sa limite est non nulle. *Indication : on pourra considérer la série de terme général* $v_n = \ln(u_{n+1}/u_n)$. On rappelle que le développement limité du logarithme népérien en 0, à l'ordre $d \in \mathbb{N}^*$, est donné par

$$\ln(1 + h) = \sum_{k=1}^{d} \frac{(-1)^k}{kh^k} + O(h^{-k}).$$

Exercice 4 (∗∗). Soit E l'espace vectoriel des suites réelles convergent vers 0. On considère l'application $\Delta : E \to E$ définie par $(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que Δ est un endomorphisme, puis déterminer son spectre ainsi que les sous-espaces propres associés.

Exercice 5 (∗∗). Soit un entier $n \geqslant 1$, et $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ l'endomorphisme qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe P', son polynôme dérivé. Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ vérifiant $\Delta = D^2$. Étendre ce résultat à $\mathbb{R}[X]$.

3.4 Khôlle du 15 novembre 2017

3.4.1 Programme

Algèbre : CM 9 (23/10) : diagonalisabilité d'un endom induit sur un sous-espace stable, diagonalisation simultanée de deux endo qui commutent. Critère de trigonalisabilité (le polyn minimal est scindé). Sous-espace caractéristique (définition). La suite des puissances des noyaux de $u - \lambda Id$ est stationnaire à partir de la multiplicité de lambda dans le polynôme minimal. De plus la dimension du sous-espace caract est égale à la multiplicité de la valeur propre. Début du paragraphe sur les projecteurs spectraux (quelques généralités sur les projecteurs en général).

CM 10 (6/11) : Généralités sur les projecteurs : équivalence entre $u^2 = u$ et (E est somme directe de $Im(u)$ et $ker(u)$ et u est l'identité sur $Im(u)$) et u est une projection sur F parallèlement à G où $E = F \oplus G$. Définition des projecteurs spectraux, Proposition : Id= somme des projecteurs spectraux, la composée de deux proj. spect. distincts est nulle, l'image est l'esp. caract. correspondant et le noyaux est la somme directe des autres esp. caract. Décomposition de Dunford (démonstration en cours).

Analyse : 25 octobre 2017 : Dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$. Dérivées partielles : définition, exemples, lien avec les dérivées partielles des fonctions coordonnées, matrice jacobienne, gradient, rotationnel et divergence. Dérivées directionnelles, les dérivées partielles sont les dérivées directionnelles selon les vecteurs de la base canonique (lorsqu'elles existent), fonctions de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (via l'existence et la continuité des dérivées partielles) : existence d'un DL à l'ordre 1, une fonction de classe C^1 est continue, admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur (formule à l'aide d'une somme des dérivées partielles), combinaison linéaire, produit et composée de fonctions C^1 (formule de dérivation en chaîne : exemples non encore traités).

8 novembre 2017 : Retour sur la dérivation en chaîne, et sa version matricielle (la jacobienne d'une composée est le produit des matrices jacobiennes). C^1-difféomorphismes : définition, exemples, condition nécessaire pour avoir un C^1-difféomorphisme (dimension de l'espace de départ et d'arrivée égale, et matrice jacobienne inversible en tout point), théorème d'inversion globale (admis), exemple sur les coordonnées polaires. Fonctions de classe C^k : dérivées partielles d'ordre supérieur, classe d'une fonction, opérations (équivalence avec le caractère C^k des fonctions coordonnées, combinaisons linéaires, produit et composée lorsque cela a un sens. Théorème de Schwarz (admis) et corollaire pour une fonction de classe C^k.

3.4.2 Questions de cours

- Définition et propriétés équivalentes d'un projecteur.
- Énoncer le théorème de décomposition de Dunford.
- Théorème d'inversion globale !
- Théorème de Schwarz.

3.4.3 Exercices

Exercice 1 ($*$). Donner la décomposition de Dunford de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 ($*$). Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un projecteur. Montrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Exercice 3 ($*$). Étudier la continuité des fonctions

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, \quad g : (x, y) \mapsto \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4}.$$

Exercice 4 ($**$). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point.
3. Déterminer les points où les dérivées partielles sont continues.
4. f est-elle C^1 ?

Exercice 5 ($***$). Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $k \geqslant 1$, $\mathrm{tr}(A^k) = 0$. Nous allons montrer qu'alors, A est nilpotente.

1. Traiter le cas $n = 1$.

2. On revient au cas $n \geqslant 1$. Montrer que $\det(A) = 0$. *Indication : appliquer le théorème de Cayley-Hamilton.*

3. À l'aide de la question précédente, montrer le résultat par récurrence sur la dimension.

Exercice 6 ($\ast\ast\ast$)**.** Soient a, b des réels tels que $|ab| < 1$. Montrer que

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x + a\sin(y), y + b\sin(x)) \end{array}$$

réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

3.5 Khôlle du 22 novembre 2017

3.5.1 Programme

Analyse : 15 novembre 2017 : Retour sur un exemple d'utilisation de la contraposée du théorème de Schwarz. Suites de fonctions : convergence simple, propriétés préservées par passage à la limite simple (signe, monotonie, convexité), exemples de propriétés non conservées (caractère borné, continuité, échange limite/intégrale). Convergence uniforme, caractérisation équivalente (à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée et sa norme infinie tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini), la convergence uniforme entraîne la convergence simple, techniques d'étude de la convergence uniforme (par étude des variations de $|f_n - f|$, ou par techniques de majoration/minoration).

Algèbre : CM 11 (13/11) : Fin de Dunford. Méthodes pratiques pour le calcul des projecteurs spectraux et pour Dunford : Proposition donnant les projecteurs spectraux à partir d'une relation de Bezout sur les facteurs irréductibles du polynôme minimal (ou caractéristique). Conséquence (nécessaire pour Dunford) : les projecteurs spectraux sont des polynômes en l'endomorphisme de départ. Traitement en détail de 4 exemples avec différentes méthodes pour obtenir les projecteurs spectraux (identité de Bezout, division euclidienne, inverser un système dans le cas diagonalisable). Chapitre 5 : Applications de la réduction des endomorphismes : 1) Puissances de matrices. Lemme si $AB = BA$ alors $(A+B)^k = \dots$. D'où une formule pour u^k en fonction des projecteurs spectraux et de l'endo nilpotent. Traitement d'un exemple.

CM 12 (20/11) : une formule de A^k dans le cas A diagonalisable. Systèmes récurrents. Solution générale ($X_k = A^k * X_0$), traitement d'un exemple. Paragraphe sur l'exponentielle d'une matrice et d'un endo. J'ai donné un certain nombre de résultats préparatoires (qui seront vus en Analyse IV de façon plus générale) : définition d'une norme sur un esp. vect., norme infinie sur $M_n(C)$, suite de matrices, séries de matrices, suite de Cauchy $\implies$ convergente, série absolument cvgente $\implies$ convergente. Définition de e^A pour une matrice carrée A de $M_n(C)$, la série la définissant converge. Suivent un certain nombre de propriétés de exp : (*) $\exp(\lambda I_n) = \exp(\lambda) I_n$, (*) Si $AB = BA$ alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$, (*) pour toute A, $\exp(A)$ est inversible d'inverse $\exp(-A)$, (*) si $B = P^-1AP$ alors $\exp(B) = P^-1\exp(A)P$, (*) $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$. Définition de $\exp(u)$ pour un endo en dimension finie comme l'unique endo dont la matrice dans une base donnée est exp de la matrice de u dans la base en question (on montre que cette définition ne dépend pas du choix de la base). Début du paragraphe sur les systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coeff constants : uniquement la définition d'un tel système et son écriture matricielle.

3.5.2 Questions de cours

- Définition de la convergence simple et uniforme. Sont-elles équivalentes ? Exemples.
- Définir les projecteurs spectraux.
- Définir l'exponentielle matricielle.

3.5.3 Exercices

Exercice 1 (∗)**.** Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On suppose que B est diagonalisable. Montrer que $B^3A = AB^3$ si, et seulement si, $AB = BA$.

Exercice 2 (∗∗)**.** Soient f, g deux endomorphismes qui commutent. Montrer qu'il existe une base dans laquelle, pour tout $P \in \mathbb{R}[X, Y]$, $P(f, g)$ est diagonal.

Exercice 3 (∗∗∗)**.** On considère les suites réelles suivantes, définies par récurrence : $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$, et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n - w_n. \end{cases}$$

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites sont-elles convergentes ?

Exercice 4 (∗∗∗)**.** Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ qui commutent. On considère

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K}).$$

Montrer que C est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable et $B = 0$. *Indication : penser au théorème de décomposition de Dunford.*

Exercice 5 (∗∗)**.** On pose

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

pour x, y réels non tous deux nuls. La fonction f admet-elle un prolongement continue à $\mathbb{R}^2$? Un prolongement de classe C^1 ? de classe C^2 ?

Exercice 6 (∗∗)**.** Soient f de classe C^2 et $g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Justifier que g est de classe C^2 et exprimer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en fonction des dérivées partielles de g.

3.6 Khôlle du 29 novembre 2017

3.6.1 Programme

Analyse : 22 novembre 2017 : Suites de fonctions : critère de Cauchy uniforme, propriétés préservées par passage à la limite uniforme : caractère borné, continuité. Théorème de la double limite. Théorèmes d'échange limite et intégrale : dans le cas d'une convergence uniforme sur un segment pour des fonctions continues ou continues par morceaux et théorème de convergence dominée (admis). Exemples.

Algèbre : ?

3.6.2 Questions de cours

– Qu'est-ce que le critère de Cauchy uniforme ?

– Énoncer le théorème de convergence dominée.

3.6.3 Exercices

Exercice 1 ($*$)**.** Étudier la convergence de la suite de fonction définie par

$$u_n(x) = \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 2 ($*$)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Montrer que

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

Exercice 3 ($**$)**.** Existe-t-il $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que son polynôme minimal soit $\pi_M = X^2 + 1$?

Exercice 4 ($**$)**.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la limite de

$$\int_0^1 f(t^n)dt$$

lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5 ($**$)**.** Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ une application inversible. Montrer qu'il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$, d diagonalisable et n nilpotente, tels que

$$u = d(id + n), \quad dn = nd.$$

Indication : penser à la décomposition de Dunford.

Exercice 6 ($***$)**.** Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction f.

1. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ ainsi qu'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit $m \geqslant 0$,

$$\|P_{n_0+m} - P_{n_0}\|_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

2. Que dire d'un polynôme borné sur $\mathbb{R}$?
3. En étudiant les suites $(P_n - P_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que f est un polynôme.

3.7 Khôlle du 6 décembre 2017

3.7.1 Programme

Analyse : 29 novembre 2017 : Fin des suites de fonctions : théorème de dérivation pour une suite de fonctions de classe C^1, extension aux suites de fonctions de classe C^p. Intégrales à paramètres, seulement le cas où le domaine d'intégration est un segment pour l'instant : théorème de continuité, de dérivation, cas des intégrales à paramètres à bornes variables (continuité et dérivabilité pour des bornes qui sont des fonctions continues/resp. de classe C^1). Exemples d'utilisation.

*Algèbre :*CM 13 (27/11) : L'application $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable et de dérivée $t \mapsto A\exp(tA)$. Si on note S_A l'esp. vect. des solutions C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $M_{nx1}(\mathbb{C})$ du système $X'(t) = AX(t)$ alors : si deux matrices complexes A et B sont semblables alors S_A et S_B sont isomorphes. J'ai énoncé et démontré un lemme technique qui a pour corollaire : $\dim(S_T)$ est majorée par n

(si T est triangulaire inférieure). Corollaire : pour toute matrice complexe A, $\dim(S_A) = n$ et est égal à l'ensemble des $(t \mapsto \exp(tA)X_0)$ où X_0 est une matrice colonne de taille $n \times 1$; j'ai également énoncé et démontré le résultat dans le cas d'une matrice A réelle. Corollaire : il existe une unique solution avec condition initiale. Ensuite, j'ai introdui les systèmes avec second membre ($X'(t) = AX(t) + V(t)$, où $V(t)$ est une matrice colonne à coeff complexes). Théorème : Soit Y une solution particulière du système avec second membre alors X est une solution si et s. si $X - Y$ est une solution de l'équation homogène associée.

CM 14 (4/12) : Méthode de la variation de la constante. Equation lineaire d'ordre n et comment se ramener à un système matriciel. Traitements de deux exemples en détails (le même exemple : 1 fois avec les projecteurs et 1 fois en trigonalisant). J'ai énoncé (dans le temps qu'il me restait) la réduction de Jordan.

3.7.2 Questions de cours

- Définition de l'exponentielle matricielle, et régularité (et dérivée) de l'application $t \mapsto \exp(tA)$.
- Énoncer le théorème de dérivation pour une suite de fonctions de classe C^1.
- Énoncer le théorème de continuité pour une intégrale à paramètre (sur un segment).

3.7.3 Exercices

Exercice 1 (∗). Caractériser toutes les matrices à la fois nilpotentes et diagonalisables dans $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2 (∗). Caractériser les endomorphismes dont la matrice est diagonale en toute base.

Exercice 3 (∗). Caractériser les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ dont tout vecteur (non nul) est un vecteur propre.

Exercice 4 (∗). Étudier la convergence de la suite définie sur $[0, +\infty[$ par

$$u_n(x) = nx \exp(-nx).$$

Exercice 5 (∗∗). Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1 - nx) & \text{si } x \in [0, 1/n], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer
$$\int_0^1 f_n(t)dt.$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

3. Étudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a > 0$.

Exercice 6 (∗∗). Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{nx^2e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}.$$

4 2018–2019 : Fondements des mathématiques 1, semestre d'automne

Référence bibliographique : http://les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf

4.1 Khôlle du 25 septembre 2018

4.1.1 Programme

Fonctions usuelles et opérations de base sur les applications ; croissances comparées. Suites et sommes arithmétiques. Bases de la logique et techniques de démonstration (récurrence, absurde, etc.). Notions ensemblistes : intersection, réunion, différence, complément, produit cartésien, ensemble de parties. Relation d'équivalence, d'ordre. Borne sup/inf, sup/inf, max/min.

4.1.2 Questions de cours

– Donner la définition d'une relation d'équivalence.

– Qu'est-ce qu'un ordre total ? Est-ce qu'un ensemble totalement ordonné admet un élément minimal ? Et s'il est borné ?

– Définir la notion d'injectivité, surjectivité, bijectivité. Exemples.

– Croissances comparées.

– Dérivation d'une composition de fonction.

4.1.3 Exercices

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right), \quad \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right), \quad \tan\left(\arccos(\sqrt{5})\right).$$

Exercice 2. En utilisant la formule de la dérivation d'une composée de fonctions, retrouver la dérivée des fonction argsinh et arccos.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble de définition maximal, la parité, puis dériver la fonction sur $]0, \pi/2[$

$$f : x \mapsto \arccos\left(\sqrt{1 - \sin^2(x)}\right).$$

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions. Montrer que si $f \circ g$ est injective, alors g l'est aussi. Montrer que si $f \circ g$ est surjective, alors f l'est aussi. Sont-ce des équivalences ? Donner des exemples.

Exercice 5. On étudie la suite suivante, définie par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n + 1, \quad u_0 = 1.$$

1. Trouver la relation de récurrence satisfaite par la suite $v_n = u_n + 1$.
2. En déduire une formule simple pour v_n, puis pour u_n.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente d'ordre 2 définie par

$$\begin{cases} u_{n+2} = 3u_{n+1} - 6u_n & \forall n \geqslant 2 \\ u_0 = 7 \\ u_1 = 0 \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est divisible par 7.

Exercice 7. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes

$$P \iff Q \sim \neg Q \iff \neg P, \qquad \neg(P \implies Q) \sim P \wedge (\neg Q)$$

Exercice 8. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

1. f présente un minimum,
2. f n'est pas décroissante,
3. f s'annule au plus une fois.

Étudier la valeur de ces assertions pour $f(x) = \arctan(x)$.

Exercice 9. Soit f une fonction. Traduire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs, puis écrire leur négation :

1. f est injective,
2. f est croissante,
3. f est paire.

Exercice 10. Étudier la fonction suivante : déterminer son domaine de définition maximal, sa parité, sa dérivée

$$x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{x^2+1}\right).$$

Exercice 11. Soit $a \in \,]0, 2/\pi[$. On étudie la suite suivante, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \prod_{k=1}^{n} \cos(a/2^k)$.

1. Simplifier le produit suivant. *Indication : multiplier par* $\sin(a/2^n)$ *et raisonner par récurrence.*
2. En déduire la limite lorsque $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right).$$

4.2 Khôlle du 8 octobre 2018

4.2.1 Programme

Ordres et exemples, définition d'un corps, borne sup' et axiome de la borne sup', calcul de cardinal, nombres complexes (Euler, Moivre, exponentielle, ...)

4.2.2 Questions de cours

– Définition d'une borne supérieure, axiome de la borne sup
– Définition des coefficients binomiaux, triangle de Pascal
– Formules d'Euler et de Moivre

4.2.3 Exercices

Exercice 1. Calculer le signe des expressions suivantes

$$\log_2(10) - 3, \quad \sin(3), \quad \ln(\pi/4), \quad \arcsin(0,3).$$

Exercice 2. Calculer la valeur des expressions suivantes, lorsqu'elles sont définies

$$\arctan(1), \quad \sin(\arccos(\sqrt{5})), \quad \arcsin(\cos(\sqrt{5})).$$

Exercice 3. Étudier puis simplifier l'expression des fonctions suivantes

$$x \mapsto \arcsin(\sin(x)), \quad x \mapsto \arcsin\left(\sqrt{1-\cos^2(x)}\right).$$

Exercice 4. Calculer

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+2)}.$$

Exercice 5. Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right).$$

Exercice 6. Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations

$$e^{6x} + e^{4x} + e^{2x} = 0, \quad e^{2x} + e^{x} - 1 = 0$$

Exercice 7. Soit $f = \cos$. Examiner les assertions suivantes ; les démontrer lorsqu'elles sont vraies, et proposer un contre-exemple sinon.

1. $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x + y/2 \in \mathbb{Z}$,
2. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y/2 \in \mathbb{Z}$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(y) > f(x)$,
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > x, f(y) = f(x)$.

4.3 Khôlle du 22 octobre 2018

4.3.1 Programme

Opérations sur les suites, suites d'ordre 1 et 2, convergence, opérations sur les limites, théorèmes des gendarme, suites adjacentes. Racines n-ièmes de l'unité, trinôme du second degré à coefficients complexes, géométrie plane dans $\mathbb{C}$. (pas d'informations sur le cours après le 10 octobre).

4.3.2 Questions de cours

- Définition et théorème de convergence des suites adjacentes.
- Énoncer le théorème des gendarmes pour les suites réelles.
- Trouver les racines complexes du trinôme $z^2 - 2z + 2$.

4.3.3 Exercices

Exercice 1. On considère

$$A = \left\{ \frac{1}{1+x^2},\ x \in]0,1] \right\},\ B = \left\{ 2 + \frac{2}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Les ensembles A et B sont ils bornés ? Admettent-ils une borne inférieure/supérieure ? Un élément minimal/maximal ?

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient

$$x^2 + y^2 - 2xy \leqslant 1,$$

et faire un dessin.

Exercice 3. Soit p en entier supérieur ou égal à 2. Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \frac{m}{p^n}, (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ une fonction qui vérifie

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$.

1. Déterminer $f(0)$.
2. Pour $x \in \mathbb{Q}$, exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(nx) = nf(x)$, puis généraliser cette propriété à $n \in \mathbb{Z}$.
4. Finalement, montrer que $f(x) = xf(1)$.

Exercice 5. Soit $X = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. On se propose de montrer que X est irrationnel.

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Calculer $(X - \sqrt{2})^3$, et en déduire une équation de la forme $a(X)\sqrt{2} + b(X) = 0$.
3. Raisonner par l'absurde conclure.

Exercice 6. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant a,\ v_n \leqslant b, \\ \lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = a + b. \end{cases}$$

Montrer que $u_n \to a$ et $v_n \to b$.

Exercice 7. 1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$. Montrer que

$$2\sqrt{a}\sqrt{b} \leqslant a + b.$$

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définie par

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que ces suites sont bien définies, et que pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n \leqslant v_n,\ u_n \leqslant u_{n+1},\ v_n \geqslant v_{n+1}.$$

3. Montrer que ces suites convergent vers la même limite. On l'appelle la moyenne arithmético-géométrique.

Exercice 8. On considère les suites suivantes, définies pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. On suppose que (u_{2n}) converge vers une limite réelle. Montrer que (u_n) converge aussi. Est-ce que les limites sont les mêmes ?

4.4 Khôlle du 6 novembre 2018

4.4.1 Programme

Même programme que la semaine dernière, avec (peut-être) quelques exercices sur les complexes traités en TD.

4.4.2 Questions de cours

- Qu'est-ce qu'une similitude directe ? Que dire de la composition de similitudes directes ? Indirectes ?
- Résoudre l'équation $z^2 = 2i$, d'inconnue z.

4.4.3 Exercices

Exercice 1. Exprimer les nombres complexes suivants sous forme exponentielle

$$\sqrt{2}, \quad i+1, \quad 4i-2.$$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$|z+1| = |z| + 1.$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} x - y = 2i \\ xy = 1. \end{cases}$$

Exercice 4. Soit (u_n) une suite de réels non nuls vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

Montrer que (u_n) converge vers 0. Existe-t-il de telles suites ?

Exercice 5. On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - x^2/2 \leqslant \ln(x) \leqslant x$.
2. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$.

Exercice 6. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui vérifient

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = 2, \quad \lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = 1.$$

Étudier la convergence de ces suites.

4.5 Khôlle du 13 novembre 2018

4.5.1 Programme

Les élèves ont travaillé sur les complexes et les suites réelles en TD. En cours (hors programme des exercices), théorème de Ramsey, théorème de Bolzano-Weierstrass, suites et séries géométriques. Arithmétique : division euclidienne, pgcd, ppcm, théorème d'Euclide, de Bézout, de Gauss. Équation diophantienne.

4.5.2 Questions de cours

- Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass en définissant les notions utilisées.
- Énoncer les théorèmes de Bézout et de Gauss.

4.5.3 Exercices

Exercice 1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants

$$z_1 = 5i - 5, \quad z_2 = 3 + 2\sqrt{3}i, \quad z_3 = e^{6i\pi/7} + 1.$$

Exercice 2. Trouver les racines complexes du polynôme

$$P(z) = z^6 + z^5 + iz^4.$$

Exercice 3. Soit $\theta \in \,]-\pi, \pi]$.

1. Par un calcul direct, trouver l'argument et le module de $z = 1 + e^{i\theta}$.
2. À l'aide d'un dessin et d'arguments géométriques, retrouver l'argument.

Exercice 4. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que
$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$
2. On suppose que $|z_1|, |z_2| \leqslant 1$. En déduire que
$$\min(|z_1 + z_2|, |z_1 - z_2|) \leqslant \sqrt{2}$$

Exercice 5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta).$$

Indication : calculer $(e^{i\theta} + 1)^2$ *de deux manières différentes.*

Exercice 6. Soit $f : z \mapsto \frac{1}{1-z}$. Déterminer son ensemble de définition D_f, puis l'image dans le plan complexe de $D_f \cap \mathcal{U}$. Faire un dessin.

Exercice 7. Montrer qu'une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée. Que dire de la réciproque de cette assertion ?

Exercice 8. Soit (u_n) une suite convergente. Montrer qu'elle de Cauchy, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall p, q \geqslant N,\ |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 9. Soit (u_n) une suite réels strictement positifs telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \mathbb{R}.$$

1. On suppose que $l > 1$. Montrer que $u_n \to +\infty$.
2. On suppose que $l < 1$. Montrer que $u_n \to 0$.
3. Que peut-on dire sur la suite lorsque $l = 1$?

5 2018–2019 : Fondements des mathématiques 2, semestre de printemps

5.1 Khôlle du 26 février 2019

5.1.1 Programme

Algèbre : Dimension d'un ev, d'un sous-ev. familles libre $\subset$ génératrice $\implies$ $\exists$ base, libre $\subset$ base $\subset$ génératrice. Théorème de la base incomplète. Deux bases de l'ev des suites $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$ (on retrouvera $X^2 - aX - b$ et ses racines jeudi avec les équa-diff du 2nd ordre).

Analyse : Implémentation de la méthode d'Euler pour une équa-diff d'ordre 2, le pendule pesant et sa linéarisation : linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, trois types de solutions suivant les racines réelles, double ou complexes conjuguées de l'équation caractéristique. Cas particulier du terme général avec second membre de la forme $Q(t)\exp(\lambda t)$ où Q est un polynôme.

5.1.2 Questions de cours

- Donner la définition d'un espace vectoriel de dimension finie, puis définir sa dimension. Quelle est la dimension de $\mathbb{C}$?
- Énoncer le théorème de la base incomplète.
- Soient $a, b \in \mathbb{C}^2$. Décrirer le $\mathbb{C}$-ev formé de l'ensemble des suites complexes vérifiant la formule de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
- Résoudre l'équation différentielle d'ordre 1, d'inconnue y, $y'(x) = a(x)y(x)$.
- Donner le développement limité de $x \mapsto 1/(1-x)$ à l'ordre k en 0.

5.1.3 Exercices

Exercice 1. Donner le développement de la fonction ln en 2 et à l'ordre 3. En déduire une approximation de $|\ln(2,1) - \ln(2)|$ à 10^{-3} près.

Exercice 2. Donner le développement limité de $x \mapsto \cos^2(x) + \sin^2(x)$ à l'ordre 9 en 0.

Exercice 3. Donner le développement limité de $x \mapsto (1+x)^{1/x}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 4. Donner le développement limité de

$$x \mapsto \exp\left(\sum_{k=1}^{2019} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}\right)$$

à l'ordre 2019, puis à l'ordre 2020, en 0.

Exercice 5. Établir la limite lorsque $n \to +\infty$ de

$$\frac{1}{n^3} \frac{n^2 \ln(1+1/n) - \sqrt{n^2-1}}{1-\cos(1/n)}.$$

Exercice 6. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de E si, et seulement si,

$$F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

Exercice 7. Soient $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Trouver G tel que $F \oplus G = E$.

Exercice 8. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. *Note : la trace n'est pas au programme, rappeler la définition.*

Exercice 9. Soient A et B deux familles de vecteurs de E. Comparer les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(A \cap B)$ et $\mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$.

5.2 Khôlle du 5 mars 2019

5.2.1 Programme

Algèbre : Sommes de sous-espaces, somme directe, supplémentaire, existence de supplémentaire, formule de Grassmann.

Analyse : Le wronskien de 2 fonctions comme fonction aire du parallélogramme dans l'espace des phases, propriétés, théorème de Cauchy-Lipschitz pour le cas linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

5.2.2 Questions de cours

- Définir une somme d'espaces vectoriels. Quelle est sa dimension (formule de Grassmann) ?
- Donner la définition de sev supplémentaires. Existence, unicité du supplémentaire ?
- Rappeler la définition du wronskien d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
- Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

5.2.3 Exercices

Exercice 1. Soient $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$, et $G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, et montrer qu'ils sont supplémentaires.

Exercice 2. Montrer que toute paire d'hyperplans admet un supplémentaire commun.

Exercice 3. Soient $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X^2 - 1$, $P_3 = X^2 + X + 1$. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $R_2[X]$.

Exercice 4. Soient $E = \mathbb{R}^2$, et $F = \{(x, y) \in E, x^2 - y^2 = 0\}$. Déterminer si F est un sous-espace vectoriel, puis identifier les sous-espaces vectoriels inclus dans F.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et en exhiber une base. Quelle est la dimension de E sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6. On pose $f(x) = \sin\big(\cos(x^3) - 1\big)$. Calculer $f^{(6)}(0)$.

Exercice 7. Soient E le $\mathbb{R}$-ev des fonctions sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, et F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que F est un sev de E.

Soient maintenant $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ et $G = \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{zt}, t \mapsto e^{\bar{z}t})$. Déterminer $F \cap G$ et donner sa dimension.

5.3 Khôlle du 12 mars 2019

5.3.1 Programme

Analyse : Méthode de Laplace de la variation des deux constantes, théorème de Cauchy-Lipschitz pour le cas linéaire non homogène d'ordre 2 à coefficients constants, équations différentielles vectorielles, équivalence d'une équation réelle linéaire d'ordre n avec une équation vectorielle linéaire d'ordre 1 à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Chapitre Intégration : subdivisions d'un intervalle, raffinement, fonctions en escalier constantes par morceaux, définition de l'intégrale pour ces fonctions.

Algèbre : Applications linéaires. Théorème du rang. Matrice d'une application étant données une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée. Matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E) \in M_n(\mathbb{K})$. Matrices équivalentes, matrices semblables. Rang comme invariant de classe d'équivalence. Trace d'une matrice. Mémo de Nicolas Ressayre.

5.3.2 Questions de cours

- Théorème du rang.
- Définition de la matrice d'une application linéaire. Trace.
- Définition d'une fonction escalier et de son intégrale.

5.3.3 Exercices

Cf. la feuille sur les ev de dimension finie de cgp.dupuydelome, celle sur le calcul asymptotique, et les exercices précédents.

5.4 Khôlle du 19 mars 2019

5.4.1 Programme

Analyse : Subdivisions pointées, à gauche, à droite, au milieu. Somme de Riemann, fonctions continues par morceaux, fonctions intégrables. Propriétés : linéarité, positivité, inégalité triangulaire, relation de Chasles, intégrale nulle d'une fonction positive $\Rightarrow$ nulle partout sauf en un nombre fini de points. Th : les fonctions continues sont intégrables. Continuité de l'intégrale en sa borne. Formule de la moyenne. Théorème fondamental de l'analyse. Intégration par partie.

Algèbre : Circularité de la trace. Trace comme invariant de matrices semblables, trace d'un endomorphisme. Sous-espaces vectoriels et endomorphismes. Tout sous-espace vectoriel est le noyau d'une application linéaire (bis repetita). Équation cartésienne d'un hyperplan. Projection sur E parallèlement à F, symétrie de E parallèlement à F. Un endomorphisme p tel que $p^2 = p$ est la projection sur $\mathrm{im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$, un endomorphisme tel que $s^2 = \mathrm{id}$ est la symétrie de $\ker(\mathrm{id} - s)$ parallèlement à $\ker(\mathrm{id} + s)$.

5.4.2 Questions de cours

- Définition d'une fonction escalier et de son intégrale. Calculer l'intégrale de la fonction « partie entière »sur $[0, 5]$.
- Donner la définition d'une subdivision pointée, et somme de Riemann associée.
- Que sont des matrices semblables ? Que peut-on dire de leur trace ? Quid des matrices équivalentes ?

5.4.3 Exercices

Exercice 1. Soient f, g deux applications linéaires sur un espace vectoriel de dimension infinie telles que $f + g$ soit bijective, et $f \circ g = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E)$.

Exercice 2. Trouver une solution particulière de l'équation différentielle

$$XY'' - Y = X^2 + 3X - 1.$$

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$xy' - y = x^2 \cos(x).$$

Exercice 4. Montrer qu'il existe $\lambda_k \in \mathbb{K}$ non tous nuls, $k \in \{0, \ldots, n^2\}$, tels que $\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k A^k = 0$.

Exercice 5. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(k) = a_k$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Exercice 6. Soit F, G des sev de dimensions respectives 4 et 5, dans un ev ambiant de dimension 7. Quelle peut-être la dimension de $F + G$? Et de $F \cap G$? De $F \cup G$?

Exercice 7. Montrer que l'équation

$$(x + y)^{18} + (x - y)^2 = 0$$

définit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et donner sa dimension.

5.5 Khôlle du 23 avril 2019

5.5.1 Programme

Analyse : Changement de variable. Intégration de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Quelques familles d'exemples : $x \mapsto P(x)e^{\lambda x}$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ par intégration par parties successives. Corollaire $x \mapsto P(x)\sin(\omega x)$, $x \mapsto \cos(x)e^{\lambda x}$. Polynômes trigonométriques $x \mapsto \cos^k(x)\sin^\ell(x)$, linéarisation de $\cos^{2k}(x)$.

Algèbre : Fractions rationnelles, éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$. Décomposition en éléments simples. Quelques exemples de méthodes pour résoudre le système.

5.5.2 Questions de cours

- Définition de la trace d'un endomorphisme.
- Qu'est-ce qu'un projecteur ?
- Calculer $\int_0^1 xe^{\lambda x}dx$ en fonction de λ.
- Formule de changement de variables.

5.5.3 Exercices

Exercice 1. On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi \ : \ \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \int_0^1 P(x)dx. \end{aligned}$$

Déterminer une base de son noyau.

Exercice 2. Soient f, g deux applications linéaires sur un espace vectoriel de dimension n telles que $f+g$ soit bijective.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) \geqslant n$.
2. On suppose en plus que $f \circ g = 0$. Montrer qu'alors $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) = n$.

Exercice 3. On considère l'application tr définie sur $M_n(\mathbb{R})$. Donner la dimension, puis une base de son noyau.

Exercice 4. Soit $T>0$, et soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ une fonction T-périodique. Montrer qu'alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

Exercice 5. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(x)dx = 1/2$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 6. Calculer la limite de la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n^3}}.$$

Exercice 7. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Déterminer la limite de

$$u_n = \int_0^1 t^n f(t)dt.$$

5.6 Khôlle du 30 avril 2019

5.6.1 Programme

Idem semaine précédente.

5.6.2 Questions de cours

Idem

5.6.3 Exercices

Exercice 1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

1. Montrer que $\mathrm{im}(p) \oplus \ker(p) = E$.
2. En déduire, en écrivant la matrice de p dans une base appropriée, que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.

Exercice 2. Soit $a>0$. On considère la fonction f définie sur $[-a,a]$ par

$$f(x) = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

1. Dessiner le graphe de f.
2. Calculer l'aire entre le graphe de f et l'axe des abscisses.

5.7 Khôlle du 7 mai 2019

5.7.1 Programme

Idem semaine précédente, avec les fractions rationnelles en exercice.

5.7.2 Questions de cours

- Décomposer la fraction rationnelle $(X + X^3)^{-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
- Linéariser $\cos^4$.

5.7.3 Exercices

Exercice 1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $1/(X^2 - 1)$, puis en déduire la somme de la série

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - 1}.$$

Exercice 2. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples

$$1.\ \frac{X^3 + 1}{X^2 + 1}, \quad 2.\ \frac{X + 2}{X^4 - X^2}, \quad 3.\ \frac{X^2 - 3X + 3}{X^3 - X^2 + 4X - 4}.$$

Exercice 3. Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $d^\circ(P) < d^\circ(Q)$. On suppose que Q est scindé à racines simples, et on note R l'ensemble de ses racines.

1. Montrer que

$$\frac{P}{Q} = \sum_{w \in R} \frac{\lambda_w}{X - w},$$

où $\lambda_w = P(w)/Q'(w)$.

2. En déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - e^{ik2\pi/n}}.$$

6 2019–2020 : Fondements des mathématiques 1, semestre d'automne

6.1 Khôlle du 17 septembre 2019

6.1.1 Programme

Révisions d'analyse : ordres et inégalités ; parité, dérivation, composition, études de fonction, surjectivité, injectivité. Récurrences, sommes et produits. Bases de logique et raisonnements.

5 septembre : [Annexe A4, Chapitre 8.1] Techniques de démonstration : Démonstration directe, démonstration par cas. Démonstration par contraposée, démonstration par l'absurde. Récurrence (simple), récurrence avec initialisation à un entier relatif, récurrence double. Récurrence forte. Principe du contre-exemple minimal et descente infinie. Exemples. Notations pour la somme et pour le produit. Somme sur un rectangle, sur un triangle.

[Chapitre 8.1, Annexe A1] Somme des n premiers entiers naturels, somme arithmétique. n !, somme géométrique. Bases de logique. Propositions, connecteurs booléens (négation, conjonction, disjonction, implication, équivalence). Tables de vérité. Equivalences entre propositions par table de vérité. Lois de de Morgan. Exemples. Quantificateurs. Non-commutativité de quantificateurs différents, exemples. Négation d'un quantificateur.

11 septembre : [Chapitre 4] Fonctions trigonométriques, fonctions trigonométriques réciproques, propriétés, périodicité. Fonctions hyperboliques, propriétés. Fonctions hyperboliques réciproques : dérivées, formules explicites.

[Annexe A2] Notions ensemblistes : Ensemble, appartenance, élément. Egalité entre deux ensembles. Exemples. L'ensemble vide. Non-existence de l'ensemble de tous les ensembles (hors programme). Intersection, réunion, différence de deux ensembles. Complément d'un ensemble (par rapport à un ensemble ambiant). Propriétés. Produit cartésien, ensemble de parties, ensemble des fonctions de X vers Y.

6.1.2 Questions de cours

- Formule de la dérivée d'une composition de fonctions. Application : retrouver la formule de la dérivée de l'inverse d'une fonction bijective.
- Croissances comparées : $\lim_{x\to 0} x\ln(x)$. Application : en déduire $\lim_{y\to\infty} ye^{-y}$.
- Somme des n premiers entiers, somme d'une suite géométrique.
- Rappeler les lois de Morgan. Donner un expression logiquement équivalente à $P \implies Q$ avec l'aide des opérateurs $\wedge$ et $\vee$. En déduire une expression de $\neg(P \implies Q)$.
- Soient A, B des ensembles. Écrire avec des quantificateurs : $A \subset B$, $A = B$.

6.1.3 Exercices

Cf. exercice 4 à 9 dans les Khôlles du 25/09/18.

Exercice 1. Étudier les fonctions

$$f : x \mapsto x\ln(x) - x + 1, \qquad g : x \mapsto x^{1/x}, \qquad h : x \mapsto \frac{-x^2}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes sur les domaines spécifiés :

$$x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x; \qquad x \in \mathbb{R},\ \sqrt{(x+1)(x-4)} = \sqrt{x-7}.$$

Exercice 3. Calculer les sommes suivantes en fonction de n :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2, \qquad \sum_{k=-n}^{n} \frac{k}{1+k^2}.$$

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Exercice 5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes

1. $x \notin \mathbb{Q}$.
2. $\forall y \in \mathbb{Q}$, $x + y \notin \mathbb{Q}$.
3. $\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2$, $qx - p \neq 0$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire les propositions suivantes en utilisant des quantificateurs, puis écrire leur négation

1. La fonction f est croissante.
2. La fonction f ne s'annule pas.
3. La fonction f est injective.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire les assertions suivantes en langage courant

1. $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C$
2. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0) \implies (x = x_0)$
3. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = y) \implies (x = x_0)$

6.2 Khôlle du 24 septembre 2019

6.2.1 Programme

18 septembre : [Chapitre 4, Chapitre 9] Fonction asymptote en $\pm\infty$ à une autre fonction. Asymptotes affines, paraboliques. Etude d'une fonction, table de variations. Exemple. Définition d'une relation sur un ensemble. Réflexivité, antiréflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité. Définition d'une relation d'équivalence, d'un ordre partiel, d'un ordre total. Majorant/minorant, éléments maximaux/minimaux d'une partie, maximum et minimum. Exemples. Non-comparabilité des éléments extrêmes, unicité du maximum/minimum.

[Annexe A4.2] Applications : Rappels, domaine, image. Restriction, composition, associativité de la composition. Image directe, image réciproque. Injectivité, surjectivité, bijectivité. Critère d'injectivité : $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$. Caractérisation par inverse à gauche (injectivité), inverse à droite (surjectivité), inverse bilatéral = fonction réciproque (bijectivité). Propriétés : f et g injectifs/surjectifs implique $g \circ f$ injectif/surjectif ; $g \circ f$ injectif/surjectif implique f injectif/g surjectif.

6.2.2 Questions de cours

- Définition d'une relation, relation d'équivalence, relation d'ordre.
- Définition d'un majorant, un élément maximal, un maximum. Exemples.
- Définir l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité. Exemples.

6.2.3 Exercices

Cf. tous les exercices dans les Khôlles du 25/09/18.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geqslant n$.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_1 &= 3 \\ u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$. Étudier la fonction. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x$.

Exercice 4. Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que

1. $\exp(x) \geqslant 1 + x$,
2. $\ln(1 + x) \leqslant x$,
3. $\sin(x) \geqslant x$.

Exercice 5. Déterminer le domaine de définition de $g \circ f$, où $f(x) = 1 + \frac{3}{x-5}$ et $g(y) = \sqrt{y}$.

Exercice 6. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i + j), \qquad \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (j + 1), \qquad \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (-1)^{i+1} j.$$

6.3 Khôlle du 1er octobre 2019

6.3.1 Programme

25 septembre : [Chapitre 9] Ordres totaux. Équivalence maximum = élément maximal et minimum = élément minimal. Borne supérieure/inférieure. Le corps ordonné des réels : axiomes d'un corps, d'un corps ordonné, exemples. Caractérisation de la borne supérieure. Axiome de la borne supérieure. La droite numérique achevée. Intervalles. Archimédianité de $\mathbb{R}$, et densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

[Chapitre 8.2] Cardinal d'un ensemble fini. Calcul du cardinal d'une réunion, d'un produit. Principe des tiroirs.

2 octobre : [Chapitre 10, Chapitre 8.2 et Chapitre 2]

6.3.2 Questions de cours

- Qu'est-ce qu'un ordre ? Qu'est-ce qu'un ordre total ? Exemples d'un ordre total, d'un ordre non total.
- Définition de la borne supérieure. Axiome de la borne supérieure et caractérisation séquentielle. Et sur $\mathbb{Q}$? Exemples.
- Définition du cardinal d'un ensemble fini, principe des tiroirs. Application : montrer que sur un ensemble de 8 personnes, au moins deux sont nées le même jour de la semaine.

6.3.3 Exercices

Cf. les exercices dans les Khôlles du 08/10/18.

Exercice 1. On considère les fonctions

$$f = \sin|_{[-\pi/2,\pi/2]} \quad \text{et} \quad g = \cos|_{[0,\pi]}\,.$$

1. Montrer que le graphe de f s'obtient du graphe de g grâce à une symétrie d'axe $x = \pi/4$.
2. En déduire que le graphe de $\arcsin = f^{-1}$ s'obtient du graphe de $\arccos = g^{-1}$ grâce à une symétrie à préciser.
3. En conclure que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2. Simplifier les fonctions suivantes après avoir étudié leur domaine de définition :

$$f(x) = \cos(2\arccos(x)), \quad g(x) = \cos(\arccos(2x)), \quad h(x) = \cos(2\arctan(x)).$$

Exercice 3. Exprimer, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(3\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$. En déduire une expression de

$$\cos(3\arccos(x)).$$

Exercice 4. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1.$$

Exercice 5. Établir une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que le système suivant, d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, admette une solution.

$$\begin{cases} \cosh(x) + \cosh(y) = a, \\ \sinh(x) + \sinh(y) = b. \end{cases}$$

Indication : on pourra poser $X = e^x$ et $Y = e^y$, puis montrer que X et Y sont les deux racines d'un polynôme de degré 2.

Exercice 6. Expliquer clairement pourquoi le raisonnement suivant est erroné.

« On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « *n points quelconques de $\mathbb{R}^2$ sont toujours alignés.* » La propriété est évidemment vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \geqslant 2$. Soient alors $n + 1$ points de $\mathbb{R}^2$, $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont alignés sur une droite $\mathcal{D}$, et, de la même manière, $A_2, \ldots, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite $\mathcal{D}'$. Or, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ contiennent toutes les deux les points A_2 et A_n, elles sont donc égales. Par conséquent, $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ sont alignés sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.

On a donc établi l'hérédité, et d'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$. »

6.4 Khôlle du 7 octobre 2019

6.4.1 Programme

2 octobre : [Chapitre 10] Suites réelles : définition, exemples. Suites (strictement) croissantes/décroissantes, constantes, suites majorées, minorées, bornées. Opérations sur les suites : somme, produit scalaire, produit. Convergence d'une suite, limite. Opérations sur les limites (somme, produit, réciproque, produit scalaire). Inégalités sur les suites, théorème des gendarmes. Suites divergentes vers ∞ ou $-\infty$; opérations sur les limites dans la droite réelle achevée.

[Chapitre 8.2 et Chapitre 2] Calcul du cardinal d'un ensemble de fonctions, d'un ensemble de parties. p-listes, p-arrangements, p-parties. Coefficients binomiaux, triangle de Pascal. Les nombres complexes : motivation par la formule de Cardano d'une racine d'une équation de troisième degré. Construction de $\mathbb{C}$ en munissant $\mathbb{R}^2$ d'une loi additive et d'une loi multiplicative. Forme algébrique d'un nombre complexe, partie réelle, partie imaginaire. Représentation d'Argand. Conjugaison complexe, module.

6.4.2 Questions de cours

- Théorème des gendarmes.
- Avec des quantificateurs : $\lim_{n\to\infty} u_n = l$. Donner un exemple de suite non croissante et non décroissante.
- Combien de p-parties dans un ensemble à n éléments ? Combien de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments ?
- Injectivité, surjectivité, bijectivité entre ensembles finis, propriétés et applications élémentaires.

6.4.3 Exercices

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cosh(3x)$ comme un polynôme en $\cosh(x)$.
2. Exprimer $\cosh^4(x)$ en fonction de $\cosh(4x)$ et $\cosh(2x)$.

Exercice 2. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Montrer que 3 divise p^2 si, et seulement si, 3 divise p. En déduire que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 3. Étudier (domaines de définition, périodicité, continuité) et tracer le graphe des fonctions $\arcsin \circ \sin$ et $\sin \circ \arcsin$.

Exercice 4. Étudier la fonction f définie, lorsque cela a du sens, par

$$f(x) = \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 5. On considère la fonction f, définie sur $[\pi, 2\pi]$ par $f(x) = \cos(x)$. Montrer que f réalise une bijection sur un ensemble à préciser, puis exprimer f^{-1} à l'aide de la fonction arccos.

Exercice 6. Expliquer clairement pourquoi le raisonnement suivant est erroné.

« On montre que 1 est le plus grand entier naturel strictement positif.

Analyse : Supposons que $n \in \mathbb{N}^*$ est le plus grand élément de $\mathbb{N}^*$. Comme $n^2 \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que, nécessairement, $n^2 \leqslant n$.

Synthèse : Pour tout entier $n > 1$, on a $n^2 > n$. Par conséquent, 1 est le seul entier qui vérifie $1^2 \leqslant 1$, c'est donc le plus grand entier. »