Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE Math4
Année universitaire 2018/2019
Printemps 2019

Corrigé du CC1 du 01.03.2019
Durée : 60 min

Exercice 1 Pour quelles valeurs de $a \in [1,2]$ les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ? Justifier soigneusement la réponse.

$$a) \quad \int_0^{2\pi} \frac{1-e^{-x}}{x^a} dx \qquad b) \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^a} dx\,.$$

Correction :
a) La fonction $f : x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x^a}$ est continue sur $]0, 2\pi]$. Le seul problème éventuel de convergence de l'intégrale est donc au voisinage de 0. Quand $x \to 0^+$, on peut écrire

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a} = \frac{1-(1+(-x)+o(x))}{x^a} = (1+o(1))\frac{1}{x^{a-1}}\,.$$

Comme $a \in [1,2]$, on obtient donc par le critère de Riemann (en 0) que l'intégrale converge si $a-1<1$, i.e. si $a \in [1,2)$, et que l'intégrale diverge si $a=2$.
b) La fonction $f : x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x^a}$ est même continue sur $]0,+\infty[$. Les seuls problèmes éventuels de convergence de l'intégrale sont donc en 0 et $+\infty$. L'étude au voisinage de 0 a été faite dans la question précédente. Maintenant, on peut écrire $f(x) = \frac{1+o(1)}{x^a}$ quand $x \to +\infty$. Comme $a \in [1,2]$, on obtient donc par critère de Riemann (en $+\infty$) que l'intégrale $\int_{2\pi}^{+\infty} f(x)dx$ converge si $a>1$ et diverge si $a=1$. Au bilan, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge pour $a \in]1,2[$ et diverge si a vaut 1 ou 2.

Exercice 2 1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $f_n(x) = e^{-|x+n|}$.

(a) Déterminer la limite simple $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ de la suite.

(b) Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx$ et puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx$.

(c) A-t-on l'égalité $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$?

(d) A-t-on l'égalité $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$?
(*La borne inférieure a été modifiée.*)

(e) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{+\infty} f_n(x)dx$.

Correction :
(a) Soit x **fixé** dans $\mathbb{R}$. Par l'inégalité triangulaire, on a $|x+n| \geq n-|x|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où on obtient $|x+n| \to +\infty$, $-|x+n| \to -\infty$ et $e^{-|x+n|} \to 0$ quand $n \to +\infty$, soit $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. La fonction f_n est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour $R>0$, on a

$$\int_{-R-n}^{R-n} f_n(x)dx = \int_{-R-n}^{R-n} e^{-|x+n|}dx \underbrace{=}_{y=x+n} \int_{-R}^{R} e^{-|y|}dy \underbrace{=}_{\text{parité}} 2\int_0^R e^{-y}dy = 2[-e^{-y}]_0^R = 2\left(1-e^{-R}\right) \to 2$$

quand $R \to +\infty$. D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 2$.
(c) On vérifie donc que $2 = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx \neq \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{=\ 0 \text{ par (a)}}\, dx = 0$.

(d) et (e) Pour n donné dans $\mathbb{N}$ et pour tout $x \geq 0$, on a $|x+n| = x+n \geq 0$. On peut donc écrire pour $R > 0$

$$\int_0^R f_n(x)dx = \int_0^R e^{-(x+n)}dx \underbrace{=}_{y=x+n} \int_n^{n+R} e^{-y}dy = [-e^{-y}]_n^{n+R} = e^{-n}(1-e^{-R}) \to e^{-n}$$

quand $R \to +\infty$. D'où $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{=\ 0 \text{ par (a)}}dx$.

Remarque : il est aussi possible d'utiliser le théorème de convergence dominée dans la question (d) (mais pas en question (c) !), puis de déduire la question (e) de la question (a).

Exercice 3 Soit $F(p) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-px^2}}{x}dx$, $p \geq 1$.

1. Montrer que $\dfrac{d}{dp}\dfrac{e^{-px^2}}{x} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{e^{-px^2}}{2p}$.
2. Déterminer $F'(p)$.

Correction :
1. La fonction f donnée par $f(x,p) = \frac{e^{-px^2}}{x}$ pour $p > 0$ et $x > 0$ est régulière sur $]0,+\infty[^2$. On peut donc calculer

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x,p) = \frac{1}{x}\frac{d}{dp}e^{-px^2} = \frac{1}{x} \times \underbrace{(-x^2)}_{\frac{d}{dp}(-px^2)} \times e^{-px^2} = -xe^{-px^2}$$

d'une part, et

$$\frac{d}{dx}\frac{e^{-px^2}}{2p} = \frac{1}{2p}\frac{d}{dx}e^{-px^2} = \frac{1}{2p} \times \underbrace{(-2px)}_{\frac{d}{dx}(-px^2)} \times e^{-px^2} = -xe^{-px^2}$$

d'autre part, ce qui conclut.
2. On a donc

$$\forall (x,p) \in [1,+\infty[^2\,, \quad 0 \leq \left|\frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\right| \leq xe^{-x^2} := g(x)\,.$$

Le fonction g ainsi définie (**indépendante de p !**) est continue sur $[1,+\infty[$ et $g(x) = o(x^{-2})$ quand $x \to +\infty$, d'où l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ converge par critère de Riemann. D'où le théorème de dérivation sous l'intégrale s'applique, F est dérivable et

$$\forall p \geq 1\,, \quad F'(p) = \int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)dx \underbrace{=}_{\text{par 1}} \frac{1}{2p}\lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{d}{dx}e^{-px^2}dx = \frac{1}{2p}\lim_{R\to+\infty}\left[e^{-px^2}\right]_1^R = -\frac{e^{-p}}{2p}\,.$$