

FICHE TD 1 - Intégrales impropres

Exercice 1 Calculer par intégration par parties ou changement de variables les intégrales à bornes suivantes :

$$(a) \int_0^{2\pi} x \cos(x) dx, \quad (b) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 2 Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ? ($n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$).

$$(a) \int_0^\infty \log(t) dt, \quad (b) \int_0^\infty e^{-4t} dt, \quad (c) \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt, \quad (d) \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$$

$$(e) \int_0^\infty e^{-t^2} dt, \quad (f) \int_0^\infty \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} dt, \quad (g) \int_0^\pi \log(\sin(t)) dt, \quad (h) \int_2^\infty (1 - \cos(\frac{1}{t})) dt$$

$$(i) \int_0^2 \log(t) dt, \quad (j) \int_0^1 \sin(\frac{1}{t}) dt, \quad \int_{\frac{2}{\pi}}^\infty \log\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt, \quad (k) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$(l) \int_1^\infty \frac{dx}{x^a}, \quad (m) \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

$$(n) \int_0^\infty e^{-bx} \sin(ax) dx, \quad (o) \int_0^\infty \frac{\sin(bx)}{x} e^{-ax} dx$$

Exercice 3 On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est **absolument intégrable** (sommable) sur \mathbb{R} si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty.$$

Que peut-on dire des limites en $\pm\infty$ d'une fonction f absolument intégrable sur \mathbb{R} ?

Exercice 4 Soit $F : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée, qui est dérivable avec dérivée continue. Montrer que l'intégrale improprie

$$\int_1^\infty \frac{F'(x)}{x} dx$$

est convergente. En déduire la convergence de $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x} dx$ et de $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$

Exercice 5 Discuter selon les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale suivante :

$$(a) \int_2^\infty \frac{1}{(\log t)^a t^b} dt, \quad (b) \int_{2016}^\infty \frac{1}{(\log t)^a t^b} dt$$