Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Année 2016-2017
Printemps 2017

# FICHE TD 7 - Fonctions à une variable complexe I

**Exercice 1** En vérifiant que la limite $\lim\limits_{\substack{w\to z\\ w\neq z}} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w}$ existe, déterminer si les fonctions suivantes sont holomorphes ou non :

$(a)$ $f(z) = z^2$ sur $\mathbb{C}$, $(b)$ $f(z) = |z|^2$ sur $\mathbb{C}$, $(c)$ $f(z) = \Re(z)$ sur $\mathbb{C}$

$(d)$ $f(z) = \dfrac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}^*$, $(e)$ $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ sur $D(0,1[$

**Exercice 2** Séries entières.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Quelle est sa somme ?

(b) Developper la fonction $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ en série entière. Quel est son rayon de convergence ?

(c) Developper la fonction $\log(1-z)$ en série entière. Ici log est le logarithme principal et $z-1 \notin \mathbb{R}^+$. Quel est son rayon de convergence ?

(d) Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $\dfrac{1}{z-a} = -\dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n$ pour tout $|z| < |a|$.

Montrer que $\dfrac{1}{z-a} = \dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n$ pour tout $|z| > |a|$.

**Exercice 3** Intégrales lelong un chemin.

1. Donner un lacet $\gamma$ qui trace un cercle de rayon $R > 0$ autour de 0 dans le sens direct. Puis calculer l'intégrale de $f(z) = \frac{1}{z}$ le long de $\gamma$, $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$.
2. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ le lacet $\gamma(t) = 25 + 24e^{2\pi i t^2}$. Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$.
3. Soit $\gamma : [0,3] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \begin{cases} Re^{\pi i t} & t \in [0,1] \\ R(t-2) & t \in [1,3] \end{cases}$. Calculer les intégrales $\int_\gamma \frac{1}{z-i} dz$ et $\int_\gamma \frac{1}{z+i} dz$ pour $0 < R < 1$ et $1 < R$.

**Exercice 4** Résidus des fonctions méromorphes. Déterminer les pôles et résidus des fonctions méromorphes suivantes :

$(a)$ $f(z) = \dfrac{z^2-4}{z^2-2z-3}$, $(b)$ $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$, $(c)$ $f(z) = \tan(z)$, $(d)$ $f(z) = \dfrac{x}{\sin(\pi x)}$, $(e)$ $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{(z-1)^2}$.