

## Résumé - Intégrales impropres

**Définition** Une primitive pour une fonction  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sur  $D \subset D_f$  est une fonction dérivable  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  t.q. la dérivée  $F'$  de  $F$  satisfait pour tout  $x \in D$

$$F'(x) = f(x)$$

**Définition** Pour une fonction  $f$  continue sur un intervalle fermé et borné  $[a, b]$  on définit l'intégral de  $f$  sur  $[a, b]$  à l'aide d'une primitive  $F$  pour  $f$  :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**Définition** Pour une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  qui n'inclut pas toutes ses bornes ou n'est pas bornée, on définit l'intégral impropre de la manière suivante :

- En cas que  $I = [a, b[$  avec  $a < b, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b' \nearrow b} \int_a^{b'} f(x)dx$$

- En cas que  $I = ]a, b]$  avec  $a < b, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a' \searrow a} \int_{a'}^b f(x)dx$$

- 
- En cas que  $I = ]a, b[$  avec  $a < b, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

pour un  $c \in ]a, b[$ .

Dans tous ces cas on dit que l'intégrale est convergente si la limite existe et est finie.

Ceci permet de définir l'intégrale impropre pour une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  qui est continue avec des sauts, c.à.d. qu'on peut partitionner  $I$  en une union disjointe d'intervalles  $I_i$   $i = 1, 2, \dots$  (union finie ou infinie) tel que  $f$  est continue sur les  $I_i$ . Dans ce cas on pose

$$\int_I f(x)dx = \sum_i \int_{I_i} f(x)dx$$

L'intégrale est dite convergente si les intégrales sur  $I_i$  sont convergentes pour tout  $i$  et la somme de ses valeurs est aussi convergente.

**Définition**  $f$  est absolument intégrable sur  $I$  si

$$\int_I |f(x)|dx < +\infty$$

### Critères de convergence

- Si  $f$  est dominé par une fonction  $g$  absolument intégrable sur  $I$ , c.à.d.  $|f(x)| \leq g(x)$  pour tout  $x \in I$  et  $\int_I g(x)dx < +\infty$ , alors l'intégrale impropre  $\int_I f(x)dx$  est convergente.
- Si  $f, g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  sont continues et équivalentes quand  $x$  tend vers  $b$ , alors  $\int_a^b f(x)dx$  est convergente si et seulement si  $\int_a^b g(x)dx$  est convergente.

**Exemples importants** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geq -1 \\ \frac{1}{-\alpha-1} & \text{si } \alpha < -1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \leq -1 \\ \frac{1}{\alpha+1} & \text{si } \alpha > -1 \end{cases}$$

## Résumé - Intégrales à paramètre

**Définition** Soit  $(f_p)_p$  une suite de fonctions  $f_p : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

– On dit que la suite converge *simplement* vers une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  si, pour tout  $x \in I$ ,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} f_p(x) = f(x).$$

**Théorème 1 (Convergence dominée)** Soit  $(f_p)_p$  une suite de fonctions  $f_p : I \rightarrow \mathbb{R}$  qui convergent simplement vers la fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . S'il existe une fonction  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.

1. pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et  $x \in I$ ,  $|f_p(x)| \leq g(x)$ ,
2.  $\int_I g(x)dx < +\infty$ ,

alors

$$\int_I f(x)dx = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_I f_p(x)dx$$

(pourvu que les intégrales existent).

**Théorème 2 (Continuité sous le signe  $f$ )** Soit  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, qui est continue dans la deuxième variable. S'il existe une fonction  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.

1. pour tout  $p \in J$  et  $x \in I$ ,  $|f(x, p)| \leq g(x)$ ,
2.  $\int_I g(x)dx < +\infty$ ,

alors

$$F(p) = \int_I f(x, p)dx$$

est continue (pourvu que l'intégrale existe).

**Théorème 3 (Dérivation sous le signe  $f$ )** Soit  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, qui est dérivable dans la deuxième variable. S'il existe une fonction  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.

1. pour tout  $p \in J$  et  $x \in I$ ,  $|\frac{\partial f(x, p)}{\partial p}| \leq g(x)$ ,
2.  $\int_I g(x)dx < +\infty$ ,

alors  $F$  est dérivable et

$$F'(p) = \int_I \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} dx$$

(pourvu que l'intégrale existe).

**Application : calcul de l'intégrale**  $\int_0^{\infty} e^{-px} \frac{\sin x}{x} dx$

On pose

$$f(x, p) = e^{-px} \frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad F(p) = \int_0^{\infty} f(x, p) dx.$$

1. Calcul de  $F'(p)$  pour  $p > 0$ . On considère  $f$  sur  $\mathbb{R}^+ \times [p_0, +\infty[$ ,  $p_0 > 0$ . Soit  $g(x) = e^{-p_0 x}$ , qui satisfait  $\int_0^{+\infty} g(x) = \frac{1}{p_0} < +\infty$ . Alors  $\frac{\partial f(x, p)}{\partial p} = -e^{-px} \sin x$  et

$$\left| \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} \right| \leq e^{-px} \leq g(x)$$

D'après Théorème 3 on a donc

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} dx = - \int_0^{+\infty} e^{-px} \sin x dx = - \frac{1}{1+p^2}.$$

2. Calcul de  $F(p)$  pour  $p > 0$ .  $F$  étant une primitive pour  $F'$  on a

$$F(p) = -\arctan p + C.$$

La constante  $C$  est déterminée par la limite en  $+\infty$  : La suite  $(f_p)_p$ ,  $f_p(x) = f(x, p)$  est dominée par la même fonction  $g : |f_p(x)| \leq e^{-p_0 x}$ . En appliquant Theorem 1 nous avons donc

$$C = \lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) + \arctan p = \int_0^{\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} f(x, p) dx + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

3. En résumé

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \frac{\sin x}{x} dx = -\arctan(p) + \frac{\pi}{2}$$

4. Remarque : On peut montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-px} \frac{\sin x}{x} dx = -\arctan(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

## Résumé - Produit de convolution sur $\mathbb{R}$

**Définition** Pour deux fonctions  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ) on pose

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

(pourvu que l'intégrale existe).

### Propriétés importantes

1.  $f * g = g * f$
2.  $(f * g)' = f' * g$

**Fonctions caractéristique** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble (typiquement un intervalle). La fonction caractéristique<sup>1</sup> sur  $I$  est la fonction  $\chi_I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

Par exemple,  $H = \chi_{[0,+\infty[}$  est la fonction de Heavyside.

Si  $I, J \subset \mathbb{R}$  sont deux intervalles et  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ , alors

$$\int_J f(x)\chi_I(x)dx = \int_{I \cap J} f(x)dx.$$

En particulier  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\chi_{[a,b]}(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ .

**Fonctions bosses** Soit  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction qui satisfait

1.  $\rho$  est positive,
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$ ,
3. Il existe un intervalle borné  $[-a, a]$  tel que  $\rho(x) = 0$  pour tout  $x \notin [-a, a]$ ,
4.  $\rho$  est de classe  $C^k$ .

On pose  $\rho_s(x) = \frac{1}{s}\rho(\frac{x}{s})$ , pour  $s > 0$ . Alors  $\rho_s$  satisfait les mêmes conditions que  $\rho$  et on a  $\rho_s(x) = 0$  même pour tout  $x \notin [-sa, sa]$ . Donc  $\lim_{s \rightarrow 0} \rho_s(x) = 0$  pour tout  $x \neq 0$ .

**Théorème 4** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors

$$\lim_{s \rightarrow 0} \rho_s * f(x) = f(x)$$

en tout point de continuité de  $f$ .

L'intérêt de ce théorème est que  $\rho_s * f$  est de classe  $C^k$  pour tout  $s > 0$ .

---

1. on dit souvent aussi fonction indicatrice de  $I$

## Résumé - Produit de convolution sur $\mathbb{R}^+$

**Définition** Pour deux fonctions  $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ) on pose, pour  $x \geq 0$

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy$$

(pourvu que l'intégrale existe).

Etant donnés deux fonctions  $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  on peut toujours les prolonger sur  $\mathbb{R}$  en posant  $f(x) = g(x) = 0$  pour  $x < 0$ . Avec cet indication le produit de convolution des prolongements  $f * g$  (sur  $\mathbb{R}$ ) coïncide avec le prolongement de leur produit de convolution  $f * g$  (sur  $\mathbb{R}^+$ ).

# Résumé - Transformation de Fourier

On rappelle que  $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$ .

**Définition** Pour une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ) on pose

$$\mathcal{F}[f](p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x) dx$$

(pourvu que l'intégrale existe, ce qui est certainement le cas si  $f$  est absolument intégrable). On note aussi  $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$  et l'appelle la transformée de Fourier de  $f$ .

## Propriétés importantes

1.  $\mathcal{F}[f + g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g]$  et  $\mathcal{F}[cf] = c\mathcal{F}[f]$  pour  $c \in \mathbb{C}$  ( $\mathcal{F}$  est linéaire).
2.  $\mathcal{F}[\overline{f}](p) = \overline{\mathcal{F}[f](-p)}$ .
3.  $\mathcal{F}[f](sp) = \frac{1}{s} \mathcal{F}[f](\frac{p}{s})$ , pour  $s > 0$ .
4.  $\mathcal{F}[f'](p) = -i\mathcal{F}[xf(x)](p)$  pourvu que ( $f$  et)  $xf(x)$  est absolument intégrable.
5.  $\mathcal{F}[f'](p) = ip\mathcal{F}[f](p)$  pourvu que les intégrales existent,  $f$  est dérivable par morceaux et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ . (Il suffit que  $f'$  et  $f$  sont absolument intégrables.)
6.  $\mathcal{F}[f(x - a)](p) = e^{-ipa} \mathcal{F}[f](p)$ .
7.  $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$ .
8.  $\mathcal{F}[fg] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$ .

**Théorème 5 (Formule d'inversion)** Soient  $f$  et sa transformée de Fourier  $\hat{f}$  absolument intégrable. Alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \hat{f}(p) dp = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\hat{f}](-x)$$

en tout point  $x$  de continuité de  $f$ .

Pour un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  on pose  $\mathcal{L}^2(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{C} : f^2 \text{ est absolument intégrable}\}$ . On peut prolonger<sup>2</sup> la transformation de Fourier à des fonctions dans  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ .

**Théorème 6 (Plancherel)** Soit  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  et  $\hat{f}$  sa transformée de Fourier. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f^2(x)| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}^2(p)| dp.$$

---

2. Ceci veut dire que pour  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  il existe une suite de fonctions  $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  qui converge vers  $f$  dans le sens de la norme  $\|\cdot\|_2$ . La transformée de Fourier  $\hat{f}$  de  $f$  est alors la limite de la suite  $\mathcal{F}(f_n)$  dans cette norme.

# Résumé - Transformation de Laplace

**Définition** Pour une fonction  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ ) on pose, pour  $s \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

(pourvu que l'intégrale existe). S'il existe  $C > 0$  et  $a \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $|f(t)| \leq Ce^{at}$ , alors  $\mathcal{L}[f](s)$  existe pour  $s > a$ .

## Propriétés importantes

1.  $\mathcal{L}[f + g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$  et  $\mathcal{L}[cf] = c\mathcal{L}[f]$  pour  $c \in \mathbb{C}$  ( $\mathcal{L}$  est linéaire).
2.  $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s - a)$ .
3.  $\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\mathcal{L}[f]'(s)$ .
4.  $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$ .
5.  $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$ . Ici le produit de convolution de deux fonctions  $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  est donné par

$$f * g(t) = \int_0^t f(t - t')g(t') dt'$$

## Exemples importantes

1.  $\mathcal{L}[e^{at}t^n](s) = \frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$  ( $a \in \mathbb{C}$ )
2.  $\mathcal{L}[e^{at} \cos(\omega t)](s) = \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$
3.  $\mathcal{L}[e^{at} \sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$

L'inversion de la transformation de Laplace se fait à l'aide des tableaux : on connaît les transformées de Laplace de certaines fonctions et essaye de se ramener à ces cas à l'aide des propriétés algébriques. Par exemple, si  $Y(s)$  est une fonction rationnelle,  $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$  pour deux polynômes  $p$  et  $q$ , et le degré de  $q$  est plus grand que le degré de  $p$ , on peut décomposer  $Y(s)$  en éléments simples et ainsi déterminer  $\mathcal{L}^{-1}[Y](t)$ .

Une équation différentielle linéaire avec conditions initiales

$$a_n f^{(n)}(t) + \dots + a_0 f(t) = g(t), \quad f^{(n-1)}(0) = b_n, \dots, f(0) = b_1$$

peut se résoudre à l'aide de la transformation de Laplace. Soit  $Y(s) = \mathcal{L}[f](s)$ . Alors, for  $k > 0$

$$\mathcal{L}[f^{(k)}](s) = s^k \mathcal{L}[f](s) - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-j-1} f^{(j)}(0) = s^k Y(s) - \sum_{j=1}^k s^{k-j} b_j$$

et donc  $Y(s)$  est donné par

$$Y(s) = \frac{\mathcal{L}[g](s) + \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^k b_j s^{k-j}}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}$$

## Résumé - Distributions

Une fonction test est une fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  qui est de classe  $C^\infty$  et s'annule en dehors d'un intervalle borné  $[-b, b]$  ( $b$  dépend de  $\varphi$ ). On note  $\mathcal{D}$  l'espace des fonctions test.

**Définition** Une distribution est une application linéaire de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{C}$ .<sup>3</sup>

### Exemples

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction (localement absolument intégrable).

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

est la distribution associée à  $f$ . Si  $f, g$  sont continues, alors  $T_f = T_g$  implique  $f = g$ . Si  $f(x) = g(x)$  pour  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ , alors  $T_f = T_g$ .

2.  $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$  est la distribution de Dirac en  $a \in \mathbb{R}$ .

**Définition** Une suite  $(T_n)_n$  de distributions tend vers la distribution  $T$  si pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$  la suite numérique  $(T_n(\varphi))_n$  tend vers  $T(\varphi)$ .

Si  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, intégrable avec  $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$  alors, on posant  $\rho_s(x) = \frac{1}{s}\rho(\frac{x}{s})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\rho_{\frac{1}{n}}} = \delta_0$$

La dite "fonction delta de Dirac"  $\delta(x)$  est une fonction généralisée, qui est déterminée par la propriété  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \delta_0(\varphi) (= \varphi(0))$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On peut dire que  $\delta(x)$  est la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\frac{1}{n}}$  au sens de distributions avec  $\rho$  comme en haut.

**Définition** La dérivée  $T'$  d'une distribution  $T$  est donnée par  $T'(\varphi) = -T(\varphi')$ .

On vérifie que  $T_f'(\varphi) = T_{f'}$  pour toute fonction dérivable (et loc. intégr.). De plus

1.  $T_H'(\varphi) = \varphi(0)$  donc  $T_H' = \delta_0$ .
2.  $\delta_a'(\varphi) = -\varphi'(a)$  et  $\delta_a^{(k)}(\varphi) = (-1)^k \varphi^{(k)}(a)$  ( $k$ -ième dérivée).

**Théorème 7** Soit  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  par morceaux avec des sauts en  $a_i \in A$ . On pose  $\Delta f(a_i) = f(a_i^+) - f(a_i^-)$ . Alors

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{i=1}^n \Delta f(a_i) \delta_{a_i}$$

Bien que la dérivée  $f'$  n'existe pas en  $a_i$ , l'expression  $T_{f'}$  a bien un sens, on peut par exemple poser  $f'(a_i) = 0$  dans la définition de  $T_{f'}$ . La formule reste valide pour un ensemble de sauts  $A$  infini (avec une somme infinie), si ses points ne s'accumulent pas.

---

3. Dans une définition rigoureuse les distributions sont supposées continues où  $\mathcal{D}$  est munie d'une topologie naturelle.

On ne peut pas définir le produit de deux distributions. Mais on peut définir le produit d'une fonction de classe  $C^\infty$  avec une distribution.

**Définition** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $C^\infty$  et  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  une distribution. Le produit de  $f$  avec  $T$  est la distribution  $fT : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$(fT)(\varphi) := T(f\varphi)$$

Sous certaines conditions on peut définir le produit de convolution de deux distributions. Ici on se content de la définition pour les distributions régulières et les dérivées de la distribution de Dirac. Il est utile de formuler le produit en utilisant la fonction delta de Dirac  $\delta$ , donc  $\delta_a(\varphi) = \int \delta(x - a)\varphi(x)dx$  et on va noter aussi  $\delta_0 = T_\delta$ .

**Définition** Soient  $f$  et  $g$  des fonctions généralisées, c.a.d. soit des fonctions usuelles (mais loc. intégr.) soit des dérivées de la fonction delta de Dirac  $\delta$ . Le produit de convolution entre  $T_f$  et  $T_g$  est défini par

$$T_f \star T_g(\varphi) = \int \int f(z)g(y)\varphi(z + y)dzdy.$$

Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions usuelles et leur produit de convolution bien défini, alors

$$T_f \star T_g = T_{f \star g}$$

De plus

$$\delta_a \star T_f = T_{f_a}$$

$$\delta'_a \star T_f = T'_{f_a}$$

$$\delta_a \star \delta_b = \delta_{a+b}$$

( $f_a$  est  $f$  décalé par  $a$ , c.a.d.  $f_a(x) = f(x - a)$ .)

Finalement

$$(T_1 \star T_2)' = T_1 \star T_2'$$

## Résumé - Fonctions holomorphes

Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert.

**Définition** Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe en  $z \in U$  si la limite

$$\lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \neq z}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

existe. Dans ce cas on le note  $f'(z)$  et l'appelle la dérivée (complexe) de  $f$  en  $z$ .  $f$  est holomorphe sur  $U$  si  $f$  est holomorphe en tout point  $z \in U$ .

Si  $f$  est holomorphe sur  $U$  alors aussi sa dérivée  $f'$  est holomorphe sur  $U$ .

### Exemples

1. Un polynôme  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$  à coefficients  $a_k \in \mathbb{C}$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .
2. Une série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_k \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$$

définit une fonction holomorphe sur son disque de convergence

$$D(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}.$$

Ici  $R$  est le rayon de convergence qui peut se calculer à l'aide du critère d'Alembert ou celui de Cauchy-Hadamard.

3. La fonction exponentielle complexe

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .

4. Le logarithme principale,  $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\log(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi$$

est une fonction holomorphe sur le plan fendu. En coordonnées polaires,  $re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0}$  ssi  $r > 0$  et  $\varphi \in ]-\pi, \pi[$ . Ici  $\ln$  est le logarithme à base  $e$ .

## Résumé - Primitives et intégrale complexe

**Définition** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et  $U \subset D$  un ouvert. Une fonction  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  est une primitive pour  $f$  sur  $U$  si  $F'(z) = f(z)$  pour tout  $z \in U$ .

### Exemples

1.  $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$  est une primitive pour  $f(z) = z^n$  sur  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  pourvu  $n \neq -1$ .
2.  $F(z) = \frac{1}{z}$  est une primitive pour  $f(z) = \log(z)$  sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0}$ .

Un chemin dans  $U$  est une application continue  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  qui est de classe  $C^1$  par morceaux. Un lacet est un chemin fermé, c.à.d. :  $\gamma(b) = \gamma(a)$ .

**Définition** L'intégrale d'une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  lelong le chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  est

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

**Théorème** On suppose que  $F$  soit une primitive pour la fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  un chemin. Alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz := F(b) - F(a).$$

En particulier, si  $\gamma$  est un lacet alors l'intégral est 0.

### Exemples

1. Soit  $f(z) = z^n$  sur  $\mathbb{C}^*$  et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ . Alors  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  si  $n \neq -1$  et

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Un ouvert  $U$  est connexe si tout point de  $U$  peut être relié à tout autre point de  $U$  par un chemin. Un ouvert  $U$  est simplement connexe s'il est connexe et tout lacet peut se rétrécir en un point sans sortir de  $U$ .

**Théorème** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Si  $U$  est simplement connexe alors  $f$  admet une primitive holomorphe.

## Résumé - Singularités isolés

Soit  $S \subset U$  un ensemble de points isolés. Une fonction méromorphe sur  $U$  est une fonction holomorphe définie sur  $U \setminus S$ . On appelle les points de  $S$  les singularités de  $f$ .

Soit  $z_0 \in S$  une singularité de  $f$ . On distingue trois cas :

1.  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existe ( $z_0$  est une fausse singularité et on peut prolonger  $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ).
2.  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$  existe pour un  $m > 0$ . On appelle  $z_0$  un pôle d'ordre  $m_0$  où  $m_0$  est le plus petit  $m$  t.q. la limite existe.
3. Le reste (singularité essentielle).

La série de Laurent de  $f$  en un point  $z_0$  est la série

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

un développement, qui généralise le développement illimité car il y a des puissances négatives dans la série. Si  $f$  a un pôle d'ordre  $m_0$  on a que  $a_n = 0$  pour  $n < -m_0$  et  $a_{m_0} \neq 0$ . Une formule (rarement utile pour le calcul) pour les coefficients est donnée par

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

où  $\gamma$  est un lacet qui tourne autour  $z_0$  une fois dans le sens direct.

Le coefficient le plus important est  $a_{-1}$ . On l'appelle le résidu de  $f$  en  $z_0$ .

$$Res(f, z_0) = a_{-1}$$

Dans la pratique les coefficients  $a_n$  se déterminent (pour  $n < 0$ ) à l'aide des limites :

1. Si la limite existe alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Mais il se peut que cette limite n'existe pas (car  $f$  a un pôle d'ordre supérieur ou une singularité essentielle).

2. Si  $f$  a un pôle d'ordre  $m_0$  en  $z_0$  alors

$$a_{-m_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{m_0} f(z).$$

Maintenant,  $f_1(z) = f(z) - \frac{a_{m_0}}{(z - z_0)^{m_0}}$  a un pôle d'ordre au plus  $m_0 - 1$  en  $z_0$  et on peut itérer ce calcul pour trouver finalement le résidu  $a_{-1}$ .

## Résumé - Théorème des résidus

Soit  $\gamma$  un lacet qui ne rencentre pas  $z_0$ . L'indice de  $\gamma$  en  $z_0$ , noté  $ind_\gamma(z_0)$  est le nombre de fois  $\gamma$  tourne autour  $z_0$  dans le sens direct.

**Théorème** Soit  $U$  un ouvert simplement connexe. Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction méromorphe et  $S$  l'ensemble de ses singularités isolés. Soit  $\gamma$  un lacet dans  $U$  qui ne rencentre pas  $S$ . Alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{z_0 \in S} Res(f, z_0) ind_\gamma(z_0).$$