

## FICHE TD 4 - Transformation de Laplace

La transformée de Laplace de la fonction  $f$  est

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

**Exercice 1** Par calcul explicite trouver la transformée de Laplace de :

$$(a) f(t) = te^{6t}, \quad (b) f(t) = e^{-t} \sin 2t$$

En se ramenant aux résultats connus trouver la transformée de Laplace de :

$$(c) f(t) = e^{\gamma t} \sin(\alpha t) \cos(\beta t), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

**Exercice 2** [*Valeur initiale et finale*] Soit  $f(t) = e^{\gamma t} \cos(t)$ . Déterminer

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{L}(f)(s) \text{ et } \lim_{s \rightarrow +\infty} s\mathcal{L}(f)(s), \text{ pour } \gamma < 0 \text{ et } \gamma \geq 0.$$

**Exercice 3** [*Inversion de la transformation de Laplace*] Trouver la fonction  $f$ , tel que  $\mathcal{L}(f)(s) = Y(s)$  où

$$(a) Y(s) = \frac{7s - 25}{s^2 - 7s + 12}, \quad (b) Y(s) = \frac{2s - 5}{s^2 + 4s + 8}, \quad (c) Y(s) = \frac{s + 4}{(s - 2)^3}, \quad (d) Y(s) = \frac{s^2 - 3s + 3}{s^3 - 3s^2 + 4s - 2}$$

**Exercice 4** [*Équations différentielles linéaires avec conditions initiales*] En utilisant la transformation de Laplace résoudre pour  $f$  l'équation

$$(a) f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = e^{3t}, \quad f(0) = 1, f'(0) = 0$$

$$(b) f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = \cos(t), \quad f(0) = 1, f'(0) = 0$$