CC 1. Sujet A

Exercice 1. Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ? Justifier soigneusement la réponse.

$$a) \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,dt \qquad\qquad b) \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}.$$

Correction.

a) Notons f la fonction définie par $f(t) = \ln(t)e^{-t}$. Comme f n'est pas définie en 0, nous découpons l'intégrale (par exemple) de 0 à 1 puis de 1 à $+\infty$. On a $f(t) \sim_0 \ln(t)$. Or $\ln(t)$ est intégrable en 0 (sa primitive vaut $t\ln(t) - t$ dont la limite en 0 existe). Ainsi

$$\int_0^1 f(t)\,dt < \infty.$$

Ensuite, pour tout $t \geqslant 1$, $|\ln(t)| \leqslant t$. Or te^{-t} est intégrable à l'infini (vu en TD). Ainsi

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt < \infty$$

et l'intégrale totale converge.

b) Encore une fois, notons f la fonction définie par $f(t) = \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$. On a $f(t) \sim_0 t^{-1/2}$ qui est intégrable en 0 (primitive $2\sqrt{t}$ dont la limite en 0 existe). Ensuite, $f(t) \sim_1 \frac{1}{1-t}$ dont la primitive est $-\ln(1-t)$ dont la limte en 1^- vaut $+\infty$. Ainsi l'intégrale converge en 0 mais diverge en 1 donc diverge. ✓

Exercice 2. Calculer, tout en justifiant, la limite quand $n \to +\infty$ de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{n+2}}.$$

Correction. — Soit f_n les fonctions de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(t) = \frac{1}{1+t^{n+2}}$. On va appliquer le théorème de convergence dominée. Pour cela, il faut trouver une fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que

1. pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leqslant g(t)$,
2. g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $t \in [0,1]$, on peut choisir $g(t) = 1$. Pour $t > 1$, on prendra $g(t) = \frac{1}{t^2}$. On vérifie aisément que g domine f et est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi comme il existe une telle fonction g, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt.$$

Pour calculer la limite demandée, il nous faut donc calculer $\lim_{n\to\infty} f_n(t)$.

$$f(t) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant t < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 1, \\ 0 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Ainsi, $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\,dt = 1$. ✓

CC 1. Sujet B

Exercice 1. Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ? Justifier soigneusement la réponse.

$$a)\ \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{1+x^2}\,dx \qquad\qquad b)\ \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx.$$

Correction.

a) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{1+x^2}$. f est continue en 0 donc l'intégrale converge en 0. Pour l'étude en $+\infty$, il est pratique de découper l'intégrale de 0 à 1 et de 1 à ∞. Sur $[0,1]$, l'intégrale converge d'après l'argument précédent. En $+\infty$, on a $f(x) \sim_{+\infty} e^{-\sqrt{x}}/x$ qui converge par un critère de Riemann.

b) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{1-x}$. Cette fonction n'est définie ni en 0 ni en 1. On découpe donc l'intégrale, par exemple, de 0 à $1/2$ et de $1/2$ à 1. $f(x) \sim_0 \ln(x)$ qui est intégrable sur $[0,1/2]$. $\ln(x) \sim_1 -(1-x)$ car $\ln(1-u) \sim_0 -u \iff \ln(x) \sim_1 -(1-x)$ d'où $f(x) \sim_1 -1$ qui est intégrable sur $[1/2,1]$. ✓

Exercice 2. Calculer, tout en justifiant, la limite quand $n \to +\infty$ de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,dx.$$

Correction. — Soit f_n les fonctions de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{n+2}}$. On va appliquer le théorème de convergence dominée. Pour cela, il faut trouver une fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que

1. pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leqslant g(t)$,
2. g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x \in [0,1]$, on peut choisir $g(x) = 1$. Pour $x > 1$, on prendra par exemple $g(x) = 1/x^2$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Pour calculer la limite demandée, il nous faut donc calculer $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

$$f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1, \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Ainsi, $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$ ✓