Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Année 2017-2018
Printemps 2018

Résumé - Intégrales impropres

Définition Une primitive pour une fonction $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sur $D \subset D_f$ est une fonction dérivable $F : D \to \mathbb{R}$ t.q. la dérivée F' de F satisfait pour tout $x \in D$

$$F'(x) = f(x)$$

Définition Pour une fonction f continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ on définit l'intégral de f sur $[a, b]$ à l'aide d'une primitive F pour f :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Définition Pour une fonction f continue sur un intervalle I qui n'incluit pas toutes ses bornes ou n'est pas bornée, on définit l'intégral impropre de la manière suivante :

— En cas que $I = [a, b[$ avec $a < b$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b' \nearrow b} \int_a^{b'} f(x)dx$$

— En cas que $I =]a, b]$ avec $a < b$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a' \searrow a} \int_{a'}^b f(x)dx$$

—

— En cas que $I =]a, b[$ avec $a < b$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

pour un $c \in]a, b[$.

Dans tous ces cas on dit que l'intégrale est convergente si la limite existe et est finie.

Ceci permet de définir l'intégrale impropre pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ qui est continue avec des sauts, c.à.d. qu'on peut partitioner I en une union disjointe d'intervalles I_i $i = 1, 2, \cdots$ (union finie ou infinie) tel que f est continue sur les I_i. Dans ce cas on pose

$$\int_I f(x)dx = \sum_i \int_{I_i} f(x)dx$$

L'intégrale est dite convergente si les intégrales sur I_i sont convergentes pour tout i et la somme de ses valeurs est aussi convergente.

Définition f est absolument intégrable sur I si

$$\int_I |f(x)|dx < +\infty$$

Critères de convergence

- Si f est dominé par une fonction g absolument intégrable sur I, c.à.d. $|f(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ et $\int_I g(x)dx < +\infty$, alors l'intégrale impropre $\int_I f(x)dx$ est convergente.
- Si $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ sont continues et équivalentes quand x tend vers b, alors $\int_a^b f(x)dx$ est convergente si et seulement si $\int_a^b g(x)dx$ est convergente.
- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue.
  - s'il existe $\alpha > 1$ t.q. $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = l$ avec l fini, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.
  - s'il existe $\alpha \leq 1$ t.q. $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f :]0, a] \to \mathbb{R}$ continue.
  - s'il existe $\alpha < 1$ t.q. $\lim_{x\to0^+} x^\alpha f(x) = l$ avec l fini, alors $\int_0^a f(x)dx$ est convergente.
  - s'il existe $\alpha \geq 1$ t.q. $\lim_{x\to0^+} x^\alpha f(x) = +\infty$, alors $\int_0^a f(x)dx = +\infty$.

Exemples importants Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geq -1 \\ \frac{1}{-\alpha-1} & \text{si } \alpha < -1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \leq -1 \\ \frac{1}{\alpha+1} & \text{si } \alpha > -1 \end{cases}$$

Résumé - Intégrales à paramètre

Définition Soit $(f_p)_p$ une suite de fonctions $f_p : I \to \mathbb{R}$.

— On dit que la suite converge *simplement* vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si, pour tout $x \in I$,

$$\lim_{p\to+\infty} f_p(x) = f(x).$$

Théorème 1 (Convergence dominée) Soit $(f_p)_p$ une suite de fonctions $f_p : I \to \mathbb{R}$ qui convergent simplement vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$. S'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ t.q.

1. pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $|f_p(x)| \leq g(x)$,
2. $\int_I g(x)dx < +\infty$,

alors

$$\int_I f(x)dx = \lim_{p\to+\infty} \int_I f_p(x)dx$$

(pourvu que les intégrales existent).

Théorème 2 (Continuité sous le signe $\int$) Soit $f : I\times J \to \mathbb{R}$ une fonction, qui est continue dans la deuxième variable. S'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ t.q.

1. pour tout $p \in J$ et $x \in I$, $|f(x,p)| \leq g(x)$,
2. $\int_I g(x)dx < +\infty$,

alors

$$F(p) = \int_I f(x,p)dx$$

est continue (pourvu que l'intégrale existe).

Théorème 3 (Dérivation sous le signe $\int$) Soit $f : I\times J \to \mathbb{R}$ une fonction, qui est dérivable dans la deuxième variable. S'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ t.q.

1. pour tout $p \in J$ et $x \in I$, $|\frac{\partial f(x,p)}{\partial p}| \leq g(x)$,
2. $\int_I g(x)dx < +\infty$,

alors F est dérivable et

$$F'(p) = \int_I \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}dx$$

(pourvu que l'intégrale existe).

Théorème 4 (Echange des intégrales) Soit $f : I\times J \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $\displaystyle\int_I\int_J |f(x,y)|dydx$ est convergente ou $\displaystyle\int_J\int_I |f(x,y)|dxdy$ est convergente alors

$$\int_I\int_J f(x,y)dydx = \int_J\int_I f(x,y)dxdy$$

et les intégrales sont convergentes.

Résumé - Produit de convolution sur $\mathbb{R}$

Définition Pour deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) on pose

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

(pourvu que l'intégrale existe).

Propriétés importantes

1. $f * g = g * f$
2. $(f * g)' = f' * g$

Fonctions caractéristique Soit $I \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble (typiquement un intervalle). La fonction caractéristique[1] sur I est la fonction $\chi_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

Par exemple, $H = \chi_{[0,+\infty[}$ est la fonction de Heavyside.

Si $I, J \subset \mathbb{R}$ sont deux intervalles et $f : J \to \mathbb{R}$, alors

$$\int_J f(x)\chi_I(x)dx = \int_{I\cap J} f(x)dx.$$

En particulier $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\chi_{[a,b]}(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

Exemples :

1. Soit $a > 0$,
$$\chi_{[-a,a]} \star f(x) = \int_{x-a}^{x+a} f(y)dy$$
donc $\frac{1}{2a}\chi_{[-a,a]} \star f(x)$ est la moyenne de f sur l'intervalle $[x-a, x+a]$. Le produit de convolution avec une fonction characteristic sur un intervalle finie a un effet de d'amortissage de f.
2. Soit F la primitive the f, qui s'annulle à $-\infty$, alors
$$H \star f(x) = F(x)$$

Définition Pour deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ on pose, pour $x \geq 0$

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy$$

(pourvu que l'intégrale existe).

Etant donnés deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ on peut toujours les prolonger sur $\mathbb{R}$ on posant $f(x) = g(x) = 0$ pour $x < 0$. Avec cet indication le produit de convolution des prolongements $f * g$ (sur $\mathbb{R}$) coincide avec le prolongement de leur produit de convolution $f * g$ (sur $\mathbb{R}^+$).

1. on dit souvent aussi fonction indicatrice de I

Résumé - Transformation de Laplace

Définition Pour une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$) on pose, pour $s \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

(pourvu que l'intégrale existe). Une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est dite de type exponentiel avec paramètre $a \in \mathbb{R}$, s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $|f(t)| \leq Ce^{at}$. Si f est de type exponentielle avec paramètre a, alors $\mathcal{L}[f](s)$ existe pour $s > a$.

Propriétés importantes

1. $\mathcal{L}[f + g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$ et $\mathcal{L}[cf] = c\mathcal{L}[f]$ pour $c \in \mathbb{C}$ ($\mathcal{L}$ est linéaire).
2. $\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s - a)$.
3. $\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\mathcal{L}[f]'(s)$.
4. $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$.
5. $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$. Ici le produit de convolution est celle des fonctions sur $\mathbb{R}^+$,

$$f * g(t) = \int_0^t f(t - t')g(t')dt'.$$

Exemples importantes

1. $\mathcal{L}[e^{at}t^n](s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (a \in \mathbb{C})$
2. $\mathcal{L}[e^{at} \cos(\omega t)](s) = \dfrac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$
3. $\mathcal{L}[e^{at} \sin(\omega t)](s) = \dfrac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$

L'inversion de la transformation de Laplace se fait a l'aide des tablaux : on connait les transformées de Laplace de certaines fonctions et essaye de se ramener à ces cas à l'aide des propriétés algébriques.

Par exemple, si $Y(s) = \frac{b}{(s-a)^n}$ alors $\mathcal{L}^{-1}[Y](t) = \frac{b}{(n-1)!} e^{at} t^{n-1}$, $t \geq 0$.

De plus, si $Y(s)$ est une fonction rationelle, $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ pour deux polynômes p et q, et le degré de q est plus grand que le degré de p, on peut décomposer $Y(s)$ en éléments simples : Le théorème fundamentale de l'algèbre nous dit qu'ils existent $s_1, \cdots, s_k$ (les racines du polynome q) et $m_1, \cdots, m_k$ (leur multiplicités), t.q.

$$q(s) = a(s - s_1)^{m_1} \cdots (s - s_k)^{m_k},$$

où $a \in \mathbb{C}$. Il en suit qu'on peut decomposer $Y(s) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ainsi

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{ij}}{(s - s_i)^j}$$

où

$$a_{ij} = \frac{1}{(m_i - j)!} \left(\frac{d^{m_i - j}(s - s_i)^{m_i} Y(s)}{ds^{m_i - j}} \right) \Bigg|_{s=s_i}.$$

et déterminé $\mathcal{L}^{-1}[Y](t)$ par linéarité..

Equations différentielles linéaires avec conditions initiales On considère l'équation

$$a_n f^{(n)}(t) + \cdots + a_0 f(t) = g(t), \quad f^{(n-1)}(0) = b_n, \cdots, f(0) = b_1.$$

Ici les données sont les nombres $a_k \in \mathbb{C}$ et la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. On cherche a déterminer f. L'équation peut se résoudre à l'aide de la transformation de Laplace. Soit $Y(s) = \mathcal{L}[f](s)$. Alors, pour $k > 0$

$$\mathcal{L}[f^{(k)}](s) = s^k \mathcal{L}[f](s) - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-j-1} f^{(j)}(0) = s^k Y(s) - \sum_{j=1}^{k} s^{k-j} b_j$$

et donc $Y(s)$ est donné par

$$Y(s) = \frac{\mathcal{L}[g](s) + \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^k b_j s^{k-j}}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}$$

L'inversion de la transformation de Laplace donne alors la solution de equation différentielle.

Résumé - Transformation de Fourier

On rappelle que $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$.

Définition Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) on pose

$$\mathcal{F}[f](p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x)dx$$

(pourvu que l'intégrale existe, ce qui est certainment le cas si f est absolument intégrable). On note aussi $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ et l'appelle la transformée de Fourier de f.

Propriétés importantes

1. $\mathcal{F}[f+g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g]$ et $\mathcal{F}[cf] = c\mathcal{F}[f]$ pour $c \in \mathbb{C}$ ($\mathcal{F}$ est linéaire).
2. $\mathcal{F}[\overline{f}](p) = \overline{\mathcal{F}[f](-p)}$.
3. $\mathcal{F}[f(x+a)](p) = e^{ipa}\mathcal{F}[f](p)$.
4. $\mathcal{F}[f(sx)](p) = \frac{1}{s}\mathcal{F}[f](\frac{p}{s})$, pour $s > 0$.
5. $\mathcal{F}[f]'(p) = -i\mathcal{F}[xf(x)](p)$ pourvu que f et $xf(x)$ sont absolument intégrables.
6. $\mathcal{F}[f'](p) = ip\mathcal{F}[f](p)$ pourvu que les intégrales existent, f est dérivable par morceaux et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. (Il suffit que f' et f sont absolument intégrables.)
7. $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$.
8. $\mathcal{F}[fg] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$.

Théorème 5 (Formule d'inversion) *Soient f et sa transformée de Fourier $\hat{f}$ absolument intégrable. Alors*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}\hat{f}(p)dp = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\hat{f}](-x)$$

en tout point x de continuité de f.

Pour un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ on pose $\mathcal{L}^2(I) = \{f : I \to \mathbb{C} : f^2 \text{ est absolument intégrable}\}$. On peut prolonger [2] la transformation de Fourier à des fonctions dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Théorème 6 (Plancherel) *Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f^2(x)|dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}^2(p)|dp.$$

2. Ceci veut dire que pour $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans le sens de la norme $\|\cdot\|_2$. La transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est alors la limite de la suite $\mathcal{F}(f_n)$ dans cette norme.

Résumé - Distributions

Une fonction test est une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est de classe C^∞ est s'annulle en dehors d'un intervalle borné $[-b, b]$ (b depend de φ). On note $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions test.

Définition Une distribution est une application linéaire de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$. [3]

Exemples

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction (localement absolument intégrable).

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

   est la distribution associée à f. Si f, g sont continues, alors $T_f = T_g$ implique $f = g$. Si $f(x) = g(x)$ pour $\mathbb{R}\backslash\{a\}$, alors $T_f = T_g$.

2. $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$ est la distribution de Dirac en $a \in \mathbb{R}$.

Définition Une suite $(T_n)_n$ de distributions tend vers la distribution T si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ la suite numeérique $(T_n(\varphi))_n$ tend vers $T(\varphi)$.

Si $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, integrable avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$ alors, on posant $\rho_s(x) = \frac{1}{s}\rho(\frac{x}{s})$

$$\lim_{n\to\infty} T_{\rho_{\frac{1}{n}}} = \delta_0$$

La dite "fonction delta de Dirac" $\delta(x)$ est une fonction généralisée, qui est determinée par la propriété $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \delta_0(\varphi)$ $(= \varphi(0))$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$. On peut dire que $\delta(x)$ est la limite $\lim_{n\to\infty} \rho_{\frac{1}{n}}$ au sens de distributions avec ρ comme en haut.

Définition La dérivée T' d'une distribution T est donnée par $T'(\varphi) = -T(\varphi')$.

On verifie que ${T_f}'(\varphi) = T_{f'}$ pour tout fonction dérivable (et loc. intégr.). De plus

1. ${T_H}'(\varphi) = \varphi(0)$ donc ${T_H}' = \delta_0$.
2. ${\delta_a}'(\varphi) = -\varphi'(a)$ et ${\delta_a}^{(k)}(\varphi) = (-1)^k\varphi^{(k)}(a)$ (k-ième dérivée).

Théorème 7 *Soit $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 par morceaux avec des sauts en $a_i \in A$. On pose $\Delta f(a_i) = f(a_i^+) - f(a_i^-)$. Alors*

$$ {T_f}' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{n} \Delta f(a_i)\delta_{a_i}$$

Bienque la dérivée f' n'existe pas en a_i, l'expression $T_{f'}$ a bien un sens, on peut par exemple poser $f'(a_i) = 0$ dans la définition de $T_{f'}$. La formule reste valide pour un ensemble de sauts A infini (avec une somme infinie), si ses points ne s'accumulent pas.

3. Dans une définition rigoreuse les distributions sont supposées continues où $\mathcal{D}$ est munie d'une topologie naturelle.

On ne peut pas définir le produit de deux distributions. Mais on peut définir le produit d'une fonction de classe C^∞ avec une distribution.

Définition Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ et $T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une distribution. Le produit de f avec T est la distribution $fT : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$,

$$(fT)(\varphi) := T(f\varphi)$$

Sous certaines conditions on peut définir le produit de convolution de deux distributions. Ici on se content de la définition pour les distributions regulières et les dérivées de la distribution de Dirac. Il est utile de formuler le produit en utilisant la fonction delta de Dirac δ, donc $\delta_a(\varphi) = \int \delta(x-a)\varphi(x)dx$ et on va noter aussi $\delta_0 = T_\delta$.

Définition Soit $T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une distribution. Une primitive S pour T est une distribution qui satisfait $S' = T$.

Comme pour les fonctions, une primitive d'une distriibution est déterminée à une constante près, c.à.d., si S est primitive de T aussi $S + CT_1$ est une primitive pour T est toute primitive de T est de cette forme.

On peut construire une primitive S pour T à l'aide d'un choix de fonction test $\rho \in \mathcal{D}$ qui satisfait $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$:

$$S(\varphi) = -T(\Phi),$$

où Φ est la primitive pour $\varphi - c_\varphi\rho$ qui satisfait $\Phi(-\infty) = 0$ et $c_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx$.

Définition Soient f et g des fonctions généralisées, c.a.d. soit des fonctions usuelles (mais loc. intégr.) soit des dérivées de la fonction delta de Dirac δ. Le produit de convolution entre T_f et T_g et défini par

$$T_f \star T_g(\varphi) = \int\int f(z)g(y)\varphi(z+y)dzdy.$$

Si f et g sont des fonctions usuelles et leur produit de convolution bien défini, alors

$$T_f \star T_g = T_{f\star g}$$

De plus

$$\delta_a \star T_f = T_{f_a}$$

$$\delta_a' \star T_f = T_{f_a}'$$

$$\delta_a \star \delta_b = \delta_{a+b}$$

(f_a est f décalé par a, c.a.d. $f_a(x) = f(x-a)$.)

Finalement

$$(T_1 \star T_2)' = T_1 \star T_2'$$

Résumé - Fonctions holomorphes

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.
Définition Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe en $z \in U$ si la limite

$$\lim_{\substack{w \to z \\ w \neq z}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

existe. Dans ce cas on le note $f'(z)$ et l'appelle la dérivée (complexe) de f en z. f est holomorphe sur U si f est holomorphe en tout point $z \in U$.

Si f est holomorphe sur U alors aussi sa dérivée f' est holomorphe sur U.
Exemples

1. Un polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_0$ à coefficients $a_k \in \mathbb{C}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. Une série entière
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_k \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$$
définit une fonction holomorphe sur son disque de convergence
$$D(z_0, R[:= \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < R\}.$$
Ici R est le rayon de convergence qui peut se calculer à l'aide du critère d'Alembert ou celui de Cauchy-Hadamard.
3. La fonction exponentielle complexe
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$
est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
4. Le logarithme principale, $\log : \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^{\leq 0} \to \mathbb{C}$
$$\log(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi$$
est une fonction holomorphe sur le plan fendu. En coordinés polaires, $re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^{\leq 0}$ ssi $r > 0$ et $\varphi \in] - \pi, \pi[$. Ici ln est le logarithme à base e.

Résumé - Primitives et intégrale complexe

Définition Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $U \subset D$ un ouvert. Une fonction $F : U \to \mathbb{C}$ est une primitive pour f sur U si $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in U$.

Exemples

1. $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ est une primitive pour $f(z) = z^n$ sur $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ pourvu $n \neq -1$.
2. $F(z) = \log(z)$ est une primitive pour $f(z) = \frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^{\leq 0}$.

Un chemin dans U est une application continue $\gamma : [a,b] \to U$ qui est de classe C^1 par morceaux. Un lacet est un chemin fermé, c.à.d. : $\gamma(b) = \gamma(a)$.

Définition L'intégrale d'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ lelong le chemin $\gamma : [a,b] \to U$ est

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Théorème On suppose que F soit une primitive pour la fonction $f : U \to \mathbb{C}$. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin. Alors

$$\int_\gamma f(z)dz := F(b) - F(a).$$

En particulier, si γ est un lacet alors l'intégral est 0.

Exemples

1. Soit $f(z) = z^n$ sur $\mathbb{C}^*$ et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$. Alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$ si $n \neq -1$ et

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = 2\pi i.$$

Un ouvert U est connexe si tout point de U peut être relié à tout autre point de U par un chemin. Un ouvert U est simplement connexe s'il est connexe et tout lacet peut se rétrécir en un point sans sortir de U.

Théorème Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si U est simplement connexe alors f admet une primitive holomorphe.

Résumé - Singularités isolés

Un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est une singularité isolée de la fonction f, s'il existe un $r > 0$ tel que f est holomorphe sur $D_{[z_0,r[}\backslash\{z_0\} = \{z \in C \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ (le disque pointé de centre z_0 et rayon r).

Soit $z_0 \in S$ une singularité isolée de f. On distingue trois cas :

1. $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe (z_0 est une fausse singularité et on peut prolonger $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$).
2. $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z)$ existe pour un $m > 0$. On appelle z_0 un pôle d'ordre m_0 où m_0 est le plus petit m t.q. la limite existe.
3. Aucun des limites $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z)$, $m > 0$, existe. On dit que f a une singularité essentielle en z_0.

Théorème 8 *Soit $z_0 \in S$ une singularité isolée de f. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ il existe un unique $a_n \in \mathbb{C}$ tel que*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

pour tout $z \in D_{[z_0,r[}\backslash\{z_0\}$ (même $r > 0$ que en haut).

Cette série s'appelle la série de Laurent de f en z_0.

1. Si z_0 est une fausse singularité alors $a_n = 0$ pour tout $n < 0$. La série de Laurent est donc la même que la série de Taylor-Lagrange (le developpement illimité).
2. Si f a un pôle d'ordre m_0 en z_0 alors $a_n = 0$ pour tout $n < m_0$.
3. Si f a une singularité essentielle alors pour une infinité de $n < 0$ on a $a_n \neq 0$.

Le coefficient de la série de Laurent de f en z_0 le plus important est a_{-1}. On l'appelle le résidu de f en z_0

$$Res(f, z_0) := a_{-1}.$$

Il se determine de la manière suivante :

1. Si la limite $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$ existe alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z).$$

   Mais il se peut que cette limite n'existe pas (car f a on pôle d'ordre $m_0 > 1$ ou une singularité essentielle).

2. Si f a un pôle d'ordre m_0 en z_0 alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m_0 - 1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m_0-1} \left((z - z_0)^{m_0} f(z)\right).$$

Résumé - Théorème des résidus

Soit γ un lacet dans $\mathbb{C}$ qui ne rencontre pas z_0. L'indice de γ en z_0, noté $ind_\gamma(z_0)$, est défini par

$$ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}dz.$$

$ind_\gamma(z_0)$ est le nombre de fois γ tourne autour z_0 dans le sens direct.

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction méromorphe sur U est une fonction qui a des singularités isolées dans U et ailleurs est holomorphe sur U. Plus précisement, il existe un ensemble $S \subset U$ de points isolés (l'ensemble de points isolés de f) tel que f est holomorphe sur $U \backslash S$.

Théorème Soit U un ouvert simplement connexe. Soit f une fonction méromorphe sur U et S l'ensemble de ses singularités isolés. Soit γ un lacet dans U qui ne rencontre pas S. Alors

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{z_0 \in S} Res(f, z_0) ind_\gamma(z_0).$$