

L'œuvre de Jean Itard en histoire des mathématiques anciennes et classiques

À cinq semaines près, c'était il y a trente-deux ans – le 8 mai 1979 – Jean Itard s'éteignait à Paris, à l'âge de soixante dix-sept ans. Pendant un demi-siècle, il n'a pas cessé de contribuer tant à l'histoire des mathématiques et à la didactique de cette discipline, qu'à la diffusion des mathématiques et de leur histoire.

Pour les historiens des sciences, le nom de J. Itard suggère avant tout les travaux d'histoire des mathématiques grecques aussi bien que classiques ou modernes, qui lui valurent une notoriété internationale. Mais tous connaissent ses différents ouvrages qui atteignent un vaste public, comme *Mathématiques et Mathématiciens* (en collaboration avec P. Dedron¹), *Arithmétique et Théorie des nombres*², *Les nombres premiers*³, *Les livres arithmétiques d'Euclide* et, finalement, les *Essais d'Histoire des mathématiques*.

Essentiellement animé d'une intention didactique, J. Itard ne concevait pas que l'enjeu de l'histoire pût se réduire à la simple érudition, aussi exhaustive fut-elle. Pour le professeur qui entend réfléchir sur sa fonction, en effet, l'analyse des conditions de l'émergence des concepts, et de leurs éventuelles rectifications, est infiniment plus féconde que l'accumulation d'informations d'une pertinence parfois discutable, et souvent stériles. Aussi J. Itard, loin d'éprouver de l'aversion pour l'analyse conceptuelle, savait-il qu'elle est le meilleur guide lorsqu'il s'agit de délimiter les champs de l'érudition. C'est cette analyse, en effet, qui indique dans quels cas il convient de consacrer tous ses soins à la détermination d'une date de naissance, ou de la date d'une lettre, etc. Mais lorsque les faits sont perdus à jamais, et que toute recherche est ainsi vouée à une conjecture plausible, l'historien doit s'en remettre à sa connaissance mathématique, philologique et philosophique pour tenter de reconstituer l'histoire évanouie. Confronté à de telles lacunes, qui n'affectent pas seulement les mathématiques anciennes mais bien aussi des périodes plus proches de nous, J. Itard procédait ainsi, guidé par sa rigueur et sa prudence à toute épreuve. Il n'oubliait jamais, même s'il n'insistait pas toujours assez pour avertir le non-spécialiste, qu'une reconstitution conjecturale ne peut être définitive, mais qu'elle présente du moins l'avantage de laisser la question ouverte, et donc de susciter des recherches ultérieures.

C'est précisément cette méthode que J. Itard a mise en œuvre dans les deux domaines auxquels il a consacré l'essentiel de ses travaux : les mathématiques

¹ Ed. Magnard, 1972.

² Que sais-je? PUF, 1e éd. 1963 ; 2e éd. 1967.

³ Que sais-je ? PUF, 1e éd. 1969 ; 2e éd. 1976.

grecques et hellénistiques, et les mathématiques en France du XVI^e siècle environ jusqu'au début du XIX^e siècle.

En histoire des mathématiques anciennes, on connaît son *Les Livres arithmétiques d'Euclide*⁴, exemplaire quant à la richesse de l'information, la rigueur de l'analyse et l'élégance de l'exposition. On sait aussi que, sur la demande d'A. Koyré, J. Itard enseigna l'histoire des mathématiques grecques à l'E.P.H.E. Dans ce domaine des mathématiques anciennes, J. Itard, qui connaissait parfaitement les travaux de Tannery, ceux de Zeuthen et de Th. Heath, a su tirer parti des acquis, relativement récents à l'époque, de l'histoire des mathématiques égyptiennes et babyloniennes, pour situer de manière précise les mathématiques grecques. Il était ainsi à même de discerner la permanence de certains thèmes et techniques au fil de cette histoire, mais aussi les différences profondes, significatives du changement de la rationalité mathématique elle-même. Pour caractériser le premier aspect, en évitant les jeux d'influence dont la véracité n'est pas douteuse, mais échappe cependant à la démonstration, J. Itard a recours à un concept qui désigne le problème plutôt qu'il ne le résout : celui de tradition mathématique. Pour saisir la nouvelle rationalité, il n'a jamais manqué, comme le montre l'introduction de son *Les Livres arithmétiques d'Euclide*, de faire précéder d'une phénoménologie des objets mathématiques l'examen détaillé des raisonnements des mathématiciens et de leur théorie de la preuve.

Au cours du dernier siècle, l'historiographie des mathématiques grecques a connu deux transformations majeures. La première, en amont, est l'effet d'une meilleure connaissance des mathématiques égyptiennes et babyloniennes. La seconde, en aval, est provoquée par le progrès de la recherche en histoire des mathématiques de langue arabe.

À partir des années vingt du XX^e siècle, on assiste à une accélération sans précédent de la recherche en histoire des mathématiques de la vallée du Nil et de la Mésopotamie. En témoignent les noms des égyptologues et assyriologues de l'époque, tels que F. Kugler, E. F. Weindner, K. Sethe, T. E. Peet, etc. F. Thureau-dangin en France et O. Neugebauer en Allemagne consacrent alors plusieurs travaux aux mathématiques de ces deux grandes civilisations. Les effets de ces recherches ne tardèrent pas à se faire sentir et à retentir sur la rédaction de l'histoire des débuts des mathématiques grecques : c'en est fini du « miracle grec » cher aux historiens tels qu'E. Renan et la création *ex nihilo* des mathématiques est devenu un concept périmé. Désormais, l'historien de ces débuts ne peut plus faire l'économie des résultats obtenus par les prédécesseurs égyptiens et babyloniens, comme le constate O. Neugebauer (« History of Mathematics », p. 271) :

⁴ Hermann, 1961.

« Il est clair que les Grecs ont attribué la découverte de savoirs qui étaient bien connus de leurs voisins du Proche-Orient à des personnages précis comme Thalès ou Pythagore. L'examen de cette soi-disant histoire des premières mathématiques grecques conjugué à ce qui nous reste des ouvrages orientaux, montre de manière concluante que la tradition grecque est une fiction ».

Une fois dénoncée cette image d'Épinal, le même Neugebauer poursuit :

« La mathématique grecque se divise en deux courants presque indépendants l'un de l'autre : (1) les mathématiques hautement scientifiques dont les *Éléments* d'Euclide et l'œuvre d'Archimède sont des représentants, (2) les mathématiques rudimentaires et plutôt appliquées qui dérivent directement de la tradition orientale ».

Ce clivage est sans doute l'effet de l'émergence du concept de la démonstration. Il est vrai qu'une bonne partie de l'arithmétique et de la géométrie présentes dans les *Éléments* d'Euclide était connue en Égypte et à Babylone au moins mille ans auparavant. Mais on ne dispose d'aucun document historique attestant que l'idée même d'une démonstration générale telle qu'elle se présente dans l'ouvrage d'Euclide ait pu être pensée avant et ailleurs. On peut donc affirmer que c'est avec ce concept de démonstration générale que les mathématiques, au sens ordinaire du terme, ont vu le jour. Ce sont les noms de Théétète, d'Eudoxe, ..., leur découverte des « irrationnels » et leurs preuves, notamment par réduction à l'absurde, qui marquent ces débuts des mathématiques théoriques. Ces mathématiciens ont dépassé, pour la première fois à notre connaissance, la simple preuve arithmétique ainsi que la démonstration par la géométrie plane lors de la preuve de l'irrationalité. C'est d'une véritable démonstration qu'il s'agit cette fois, fondée sur la théorie des proportions et reposant sur des grandeurs en général, connaissables ou non, démonstration que l'on rencontrera plus tard dans le cinquième livre des *Éléments* d'Euclide. Avec ces mathématiciens débute la *géométrisation* de l'ensemble des mathématiques, ainsi que son « axiomatisation ».

Une tâche s'impose désormais à l'historien des mathématiques : montrer comment, en ce lieu et en ce temps, les mathématiques héritées, jusque-là constituées pour l'essentiel de procédés de calcul — on dirait aujourd'hui d'algorithmes —, sont devenues une théorie démonstrative. Mais cette démarche renvoie elle-même à une analyse préalable : il faudrait expliquer quand et

comment les objets mathématiques ont atteint un degré d'abstraction tel que l'édification logique d'un système de vérités est non seulement possible, mais nécessaire. Une telle réflexion pourrait bien à son tour ramener à l'histoire de la philosophie ou, plus précisément, à celle des interactions entre mathématiques et philosophie. Ce ne peut à l'évidence être l'effet du hasard si les débuts des mathématiques théoriques et de l'« axiomatisation » ainsi que l'émergence du concept de démonstration sont contemporains de la constitution d'une nouvelle branche de la philosophie, la « logique », telle qu'elle apparaît dans l'*Organon* d'Aristote. On peut voir dans ces liens entre mathématiques théoriques et système logique un trait distinctif de la contribution grecque.

Jean Itard est l'un des rares historiens des mathématiques en France qui ait pris pleinement conscience de l'importance de ces nouvelles découvertes pour l'étude de l'histoire des mathématiques grecques, comme en témoignent son *Les livres arithmétiques d'Euclide* ainsi que ses autres travaux sur les mathématiques hellénistiques.

La seconde transformation qui a frappé, en aval, l'historiographie de ces mathématiques, porte principalement sur l'époque hellénistique. En effet, la découverte des traductions arabes des textes mathématiques perdus en grec modifie souvent jusqu'au tracé des frontières des mathématiques hellénistiques. Ces traductions ont permis à l'historien de connaître les *Coniques* d'Apollonius, son livre sur *La Section des droites selon des rapports*, les *Sphériques* de Ménélaüs ou les *Arithmétiques* de Diophante, entre bien d'autres ouvrages. À celles-ci il faut ajouter les travaux des héritiers des mathématiciens hellénistiques, qui parfois ont prolongé les acquis de leurs prédécesseurs, parfois les ont transformés. Dans un cas comme dans l'autre, l'historien y trouve des instruments précieux grâce auxquels il est mieux armé pour comprendre et situer les contributions des mathématiciens grecs.

J. Itard avait conscience de ce que les mathématiques arabes peuvent apporter non seulement à l'historien des mathématiques grecques, mais aussi à la compréhension des mathématiques postérieures. Cependant, la connaissance de l'histoire des mathématiques arabes, en France notamment, au milieu du siècle dernier, était non seulement faible, mais anecdotique, contrairement à ce qu'elle était à la même époque en Union Soviétique.

J. Itard a donc rédigé plusieurs essais sur les mathématiques hellénistiques, réunis dans les *Essais d'Histoire des mathématiques*. Il s'intéressait moins à la généalogie hypothétique de ces mathématiques qu'aux débuts de ces mathématiques théoriques. Il s'attachait donc à la manière dont les mathématiciens ont pu définir les termes auxquels ils recouraient, tels que point, ligne, surface, angle, nombre, pair, impair, premier, composé, etc. On relève dans les *Éléments* d'Euclide les traces d'anciennes définitions géométriques

d'origine métrologique, ainsi que des définitions arithmétiques d'origine égyptienne. On y lit que « un point est ce qui n'a pas de partie », « une ligne est une longueur sans largeur », « une surface est ce qui a seulement longueur et largeur ». On peut d'ailleurs remonter de ces définitions jusqu'aux dialogues de Platon. Tandis que Platon distingue, pour le concept d'angle rectiligne, trois espèces : droit, aigu et obtus, Euclide, au III^e siècle, définit l'angle dans un plan comme « l'inclinaison mutuelle de deux lignes » et ajoute : « lorsqu'une droite élevée sur une droite fait deux angles adjacents égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit ».

La définition des termes géométriques, dont les débuts sont sans doute antérieurs au IV^e siècle avant notre ère, est le premier pas dans l'édification de la structure d'abstraction en géométrie, démarche inséparable de l'élaboration de la méthode « axiomatique ». Au troisième siècle en tout cas, on énonce les axiomes (ou notions communes) et les postulats (demandes). Les axiomes donnés dans les *Éléments* sont au nombre de neuf :

1. « Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les tous seront égaux.
3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les tous seront inégaux.
5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les tous seront inégaux.
6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.
7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.
8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie » (trad. F. Peyrard, p. 3).

Quant aux postulats énoncés par Euclide, ils « demandent » :

- mener une droite d'un point à un autre
- prolonger une droite finie
- décrire un cercle de centre et de demi-diamètre quelconque
- admettre l'égalité de tous les angles droits
- « si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits ».

- « deux droites ne renferment point un espace ».

Ces fondements de l'armature logique de la géométrie, admirable pour l'époque, souffrent d'un manque dont les conséquences pèseront durant des siècles : la structure topologique est intuitive, comme elle l'était dans les mathématiques égyptiennes et babyloniennes. Sur cette lacune, J. Itard insiste dans son étude de *l'angle de contingence*. Euclide admet, sans le dire, que la droite sépare le plan en deux ensembles convexes disjoints ; que le plan sépare l'espace d'une manière analogue ; qu'on « appelle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose » ; et qu'« une figure est comprise par une seule ou par plusieurs limites » (*ibid.*, p. 1). C'est sur de telles définitions, intuitives et logiquement faibles, que s'appuient la plupart des démonstrations d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, etc.

À partir de ces définitions, postulats et axiomes explicites, ainsi que de bien d'autres, implicites, on a démontré les propositions, les théorèmes et résolu les problèmes mathématiques en suivant une démarche logique. C'est tout cela qui distingue les mathématiques théoriques. Cependant les documents exploitables pour écrire l'histoire des mathématiques grecques avant le III^e siècle avant notre ère sont rares et souvent peu fiables, si bien que la part des conjectures et des hypothèses avancées par les historiens est très grande. Aussi sommaire soit-il, un exposé de l'histoire des mathématiques avant le III^e siècle exigerait donc que ces hypothèses et conjectures soient discutées en détail, ce à quoi ne suffiraient pas les pages consacrées à ce chapitre. Aussi J. Itard a-t-il préféré s'engager sans délai sur le terrain plus ferme des mathématiques hellénistiques, en abordant directement les principales tendances qui les ont formées : géométrie du plan et géométrie des solides ; géométrie de mesure ; géométrie des positions et des formes, géométrie de la sphère ; théorie arithmétique. Je prendrai donc quelques exemples analysés par J. Itard.

Géométrie plane et géométrie des solides : Euclide

La rédaction, à peu près définitive, des *Éléments* eut lieu au III^e siècle avant notre ère, dans le milieu mathématique d'Alexandrie. Cet ouvrage est composé de treize livres, dont les quatre premiers traitent de la géométrie plane élémentaire — réserve faite pour la théorie de la similitude qui, elle, est reportée au livre VI. Au livre V, Euclide expose une théorie importante des rapports de grandeurs. Les trois livres suivants sont consacrés à une arithmétique d'entiers, où les nombres sont représentés par des segments de droite. On étudie au livre X une théorie géométrique des irrationnels quadratiques. Les trois derniers livres traitent de la géométrie des solides.

Étant donné le rôle majeur de l'ouvrage d'Euclide, aussi bien comme instrument que comme modèle de rédaction, dans l'histoire, arrêtons-nous brièvement aux thèmes qui y sont étudiés.

Le premier livre s'ouvre sur les définitions, postulats et axiomes, à partir desquels va être échafaudée toute la construction. Suivent les propositions, qui se partagent en trois groupes. Le premier se rapporte à la construction de triangles, aux relations d'inégalité entre les côtés et les angles d'un même triangle, à trois cas d'égalité, à quelques constructions à la règle et au compas (bissectrice d'un angle, milieu d'un segment, perpendiculaire à une droite). Le second groupe de propositions est consacré à la théorie des parallèles et à son application à la somme des angles d'un triangle.

Rappelons à cet égard que les mathématiciens égyptiens et babyloniens ne semblent pas avoir mis en doute l'existence du carré et la possibilité d'un pavage du plan par des carreaux rectangulaires ou carrés. Les mathématiciens d'Alexandrie parviennent au même résultat au terme d'un détour subtil. Euclide commence en effet par donner une définition du parallélisme : « Les parallèles sont des droites qui, étant dans un même plan et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre ». Par cette définition, l'infini se trouve une nouvelle fois introduit dans la géométrie. Il l'était en effet déjà dans la définition du point comme résidu qui subsiste après toutes les divisions d'une aire, d'une longueur : le point est « sans parties ».

Mais cette définition négative du parallélisme laissait une option à prendre à qui voulait retrouver l'existence du carré ou la possibilité du pavage. Euclide la prend en énonçant son célèbre cinquième postulat. Ce postulat a suscité par la suite, à partir du IX^e siècle notamment, toute une tradition de recherche à laquelle appartiennent, entre autres, Posidonius, Proclus, Aghænis, Thæbit ibn Qurra (826-901), Ibn al-Haytham (mort après 1040), al-Khayyâm (1048-1131), Wallis (1616-1703), Saccheri (1687-1733).

Le troisième groupe de propositions de ce même livre étudie l'équivalence de parallélogrammes et de triangles, et le livre s'achève sur le « théorème de Pythagore ».

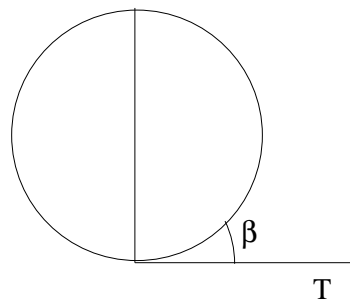
Si le premier livre des *Éléments* a gardé une certaine actualité, le second, lui, a vieilli plus vite, et sera remplacé dès le IX^e siècle par l'algèbre géométrique lorsque ce chapitre fut créé par Ab^o Kæmil (milieu du IX^e siècle) et Thæbit ibn Qurra. Ce livre énonce en effet un ensemble de théorèmes que nous pouvons résumer par les formules algébriques suivantes :

$$a(b + \chi + \delta) = \alpha\beta + \alpha\chi + \alpha\delta$$

$$(\beta + \chi)^2 = (\beta + \chi)\beta + (\beta + \chi)\chi$$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \quad \epsilon\tau\chi$$

Le troisième livre est consacré aux propriétés élémentaires du cercle. On y trouve les propriétés relatives à ce qu'on appelle « la puissance » d'un point par rapport à un cercle. C'est à propos de la tangente au cercle qu'apparaît la question, difficile et amplement controversée, de l'« angle de contingence » — l'angle curviligne fait par la tangente en un point du cercle (l'angle β de la figure). À cette question, J. Itard consacre deux études réunies dans les *Essais d'Histoire des mathématiques*.



Dans le quatrième livre, on étudie l'inscription dans le cercle et la circonscription au cercle des premiers polygones réguliers P_n , avec $n = 3, 4, 5, 6, 15$ côtés. L'heptagone, dont les Babyloniens s'étaient occupés au même titre que des autres polygones, est passé sous silence. C'est que sa construction n'est pas élémentaire, et qu'il a fallu attendre le X^e siècle pour que le problème soit discuté et résolu.

Avec le cinquième livre, les *Éléments* atteignent un niveau très élevé : il y est établi une théorie des rapports de grandeurs, qui sera la langue de la géométrie durant des siècles. On a souvent répété que cette théorie est assez proche des méthodes conçues au XIX^e siècle pour l'étude de l'ensemble des nombres réels, mais elle en diffère sur certains points fondamentaux. Tout d'abord, l'ensemble des grandeurs considérées dans cette théorie n'est pas un corps, mais simplement un groupe. Une seule opération interne y est en effet définie : « la composition des rapports », ce que nous appelons aujourd'hui le produit. D'autre part, si tout couple de grandeurs A et B définit un rapport, la continuité de l'ensemble des nombres réels n'est pas postulée comme elle l'est de nos jours, ce qui sera la source au cours des siècles de bien des difficultés et malentendus.

L'objet du sixième livre est l'application des méthodes du livre V à la géométrie plane. On y trouve une théorie de la similitude, ainsi que la construction géométrique des problèmes « du second degré ».

Les livres VII, VIII et IX se rapportent à l'étude de la théorie du pair et de l'impair, des nombres premiers et des nombres composés, de la théorie de la divisibilité et, enfin, des nombres parfaits. Ces livres ont été publiés et commentés par J. Itard.

Le dixième livre comprend plus de cent propositions, consacrées à ce que nous pourrions appeler les irrationnels quadratiques. Il traite des longueurs qui se déduisent d'une longueur de base par des constructions à la règle et au compas. À partir du X^e siècle, les mathématiciens arabes donnent une interprétation algébrique de la théorie géométrique qui y est élaborée.

Les dix-neuf premières propositions du livre XI concernent les droites et les plans parallèles ou perpendiculaires ; viennent ensuite quatre énoncés relatifs aux angles trièdres, appelés « angles solides compris sous trois plans ». Les propositions suivantes, jusqu'à la quarantième et dernière, traitent du volume des parallélépipèdes et des prismes. Aucune distinction n'est faite entre égalité et symétrie, et il n'est nulle part question, bien entendu, de mesurer les volumes, mais seulement de les comparer entre eux. Ainsi, la proposition 32 ne dit pas que la mesure du volume du parallélépipède est le produit de l'aire de la base par la hauteur, mais que « les parallélépipèdes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases ».

Le livre XII débute par deux propositions qui servent à établir que « les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres ». Les propositions suivantes, jusqu'à la neuvième incluse, traitent du volume de la pyramide. Les propositions 10 à 15 étudient le volume du cylindre droit et du cône de révolution. Les trois dernières propositions établissent que « les sphères sont entre elles en raison triple de leurs diamètres », c'est-à-dire que leurs volumes sont proportionnels aux cubes de leurs diamètres. La méthode suivie par Euclide, très originale, et dont plus tard Archimède fera un usage magistral, sera nommée au XVII^e siècle « méthode d'exhaustion ».

Le treizième livre est réservé aux cinq polyèdres réguliers convexes qui jouent le rôle que l'on sait dans le *Timée* de Platon : le cube, le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre et le dodécaèdre.

La géométrie de mesure : Archimède

La seconde contribution hellénistique sur laquelle J. Itard a écrit est celle d'Archimède, notamment son livre *Des Spirales*. Mais, si l'intérêt qu'il porte à Euclide est pour ainsi dire extensif, ce qui attire J. Itard chez Archimède est la topologie sous-jacente. Expliquons-nous.

Archimède est parmi les mathématiciens hellénistiques l'un des mieux connus, tant pour ses travaux que pour ses rapports avec les mathématiciens d'Alexandrie (comme Conon et Dosithée) et pour quelques épisodes de sa vie, ou plutôt pour sa mort, en 212 avant notre ère. Un très grand nombre de ses écrits, une fois n'est pas coutume, nous est parvenu.

Les travaux d'Archimède portent sur la géométrie, la statique, l'arithmétique et l'astronomie.

En géométrie, il cultive surtout les déterminations infinitésimales des surfaces et des volumes limités par des courbes, ou, en d'autres termes, la géométrie de mesure ; là, il suit les traces d'Eudoxe. Il met au point les méthodes que les mathématiciens arabes et ceux du XVII^e siècle appliqueront ensuite à la mesure de ces surfaces et de ces volumes. Mais, dans son traité *Des Spirales*, il applique des méthodes infinitésimales à la recherche de la tangente à une courbe plane. Dans son traité *De la Méthode*, il expose ses procédés de découverte, qui souvent assimilent un volume à un ensemble de feuillets plans, un peu comme le fera Cavalieri au XVII^e siècle.

Étant ainsi parvenu à sa fameuse expression du volume de la sphère : « Toute sphère est quadruple du cône ayant la base égale au plus grand cercle de la sphère et la hauteur égale au demi-diamètre de la sphère [...] » (*La Méthode*, trad. P. Ver Eecke, prop. 2 avec une légère modification ; *De la sphère et du cylindre*, prop. I.34, vol. I, p. 65), il s'explique ainsi :

« j'ai conçu que la surface de toute sphère équivaut à quatre de ses plus grands cercles ; car j'avais eu l'intuition que, puisque tout cercle équivaut au triangle dont la base est égale à la circonférence du cercle et la hauteur égale au demi-diamètre, toute sphère équivaut au cône dont la base est équivalente à la surface de la sphère, et dont la hauteur est égale au demi-diamètre » (*La Méthode*, prop. 2).

C'est dans son très court écrit *Sur la Mesure du cercle* — qui nous est parvenu en deux versions, comme l'atteste la traduction arabe — qu'Archimède établit la proposition sur l'aire du cercle à laquelle il vient de faire allusion. C'est dans ce même écrit qu'il montre, de manière définitive, que $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$. Quant au volume et à l'aire de la sphère, il en reprend l'étude dans son traité *Sur la Sphère et le Cylindre*, suivant une méthode axiomatique très différente de la méthode mise en œuvre pour la recherche de ces résultats, et où il postule :

- 1° Si deux lignes convexes ont mêmes extrémités et si l'une enveloppe l'autre, la ligne enveloppée est la plus petite.
- 2° Si deux surfaces convexes sont limitées à la même courbe plane et si l'une enveloppe l'autre, la surface enveloppée est la plus petite.

Au second livre de ce même traité, il pose quelques problèmes, comme par exemple : « Couper une sphère donnée de manière que les segments de sphère soient entre eux dans un rapport donné » — problème cubique qui sera résolu plus tard par les mathématiciens du X^e siècle.

Dans ses autres traités, Archimède détermine l'aire et le centre de gravité d'un segment de parabole, définit les sphéroïdes (ellipsoïdes de révolution), les

conoïdes droits (paraboloïdes de révolution), et obtus (hyperboloïdes de révolution autour de l'axe transverse) ; il en trouve les sections planes, les volumes, les volumes des segments, ainsi que les centres de gravité de ces segments. Il trouve aussi le volume de la partie commune à deux cylindres inscrits dans le même cube et dont les axes sont orthogonaux. Tous les procédés d'investigation auxquels il recourt seront repris et développés par ses successeurs, aux X^e-XI^e siècle, et au XVII^e siècle.

La spirale ($S = a\omega$) est définie par Archimède en ces termes :

« Lorsqu'une droite, dont une extrémité est fixe, tourne uniformément dans un plan, reprenant la position d'où elle est partie, et que, sur la droite en rotation, un point se meut uniformément comme elle à partir de l'extrémité fixe, le point décrira une spirale dans le plan » (cf. *Des spirales*, trad. Ch. Mugler, légèrement modifiée, p. 11).

Archimède étudie l'aire délimitée par la courbe, dont il place la tangente. Il montre par exemple que la sous-tangente polaire en l'extrémité de la spire est égale à la circonférence du cercle.

Les divers écrits d'Archimède, auxquels il faut ajouter l'introduction du livre IV des *Coniques* d'Apollonius, attestent que les mathématiciens d'Alexandrie au troisième siècle avant notre ère connaissaient bien les sections coniques. Euclide aurait d'ailleurs écrit un traité sur ces sections, et Conon, l'ami d'Archimède, leur avait consacré une partie de ses écrits. Mais le traité d'Apollonius, une ou deux générations plus tard, a éclipsé, par son importance, les œuvres de ses prédécesseurs en ce domaine, aujourd'hui disparues.

L'arithmétique et la théorie des nombres : Diophante

Une autre contribution des mathématiques hellénistiques qui intéressait particulièrement J. Itard spécialiste de l'histoire de la théorie des nombres est celle de Diophante. En effet dans les mathématiques hellénistiques, on peut distinguer trois espèces d'arithmétique d'entiers : euclidienne, telle qu'on la trouve dans les livres VII, VIII et IX des *Éléments* étudiés par J. Itard ; néo-pythagoricienne, telle qu'elle est exposée dans l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque de Gérase (II^e siècle après J.-C.); et, enfin, l'analyse de Diophante, consignée dans les *Arithmétiques*. Les deux premières traitent pour l'essentiel des mêmes problèmes, mais selon des méthodes différentes. Alors en effet qu'Euclide représente les entiers par des segments de droite et peut ainsi donner des démonstrations déductives des propositions, les néo-pythagoriciens procèdent par induction incomplète. Quant à l'analyse de Diophante, même si elle partage avec ces arithmétiques les mêmes notions du nombre et des

opérations, elle appartient davantage à la théorie des nombres, en ce sens qu'elle traite des propriétés des triangles rectangles numériques, des solutions en nombres rationnels positifs des équations, etc. Or ces trois arithmétiques sont, bien plus que les disciplines géométriques, chacune à sa manière, dans la continuité des anciennes traditions égyptiennes et babyloniennes. Ici, on n'évoquera que l'analyse de Diophante.

Les *Arithmétiques*, ouvrage principal de Diophante, a vu son volume doubler après la découverte de la traduction arabe de quatre livres perdus en grec, de sorte que, des treize annoncés par l'auteur, on en possède aujourd'hui dix : six en grec, quatre en arabe. Dans les quelques décennies qui viennent de s'écouler, l'historiographie de Diophante a donc subi une authentique mutation, qu'il s'agisse de l'œuvre elle-même ou de ses interprétations. Avant son décès, J. Itard avait eu connaissance de la nouvelle découverte et commençait à l'étudier. Mais le temps lui a manqué.

Le but explicitement formulé par Diophante dans son traité est d'édifier une théorie arithmétique, *arithmètikè theôria*, dont les éléments constitutifs seraient les nombres, considérés comme pluralités d'unités (les entiers), et les parties fractionnaires comme fractions de grandeurs. Ces éléments de la théorie sont non seulement présents « en personne », mais comme espèces des nombres. Sous le terme d' « espèce » de nombres, Diophante entend également et indifféremment la puissance d'une pluralité déterminée et la puissance d'une pluralité quelconque, c'est-à-dire provisoirement indéterminée, mais qui toujours sera déterminée à la fin de la solution du problème. Diophante parle de trois espèces de nombres : linéaire, plan et solide ; celles-ci engendrent toutes les autres, lesquelles doivent, à la limite, adopter leur nom. Ainsi, les espèces de nombres ne peuvent l'être que par *composition*, et la puissance de chacune est nécessairement un multiple de 2 ou de 3.

Une fois définis les termes de la théorie, Diophante explique les opérations arithmétiques que l'on peut leur appliquer et donne la règle des signes. Il combine ensuite ces espèces entre elles, sous certaines contraintes et à l'aide des opérations de l'arithmétique, pour déterminer des problèmes à résoudre. Par exemple : « Partager un carré donné en deux carrés » ou « trouver deux nombres, carré et cubique, dont le produit soit un nombre carré ». Pour chacun de ces problèmes, il cherche à déterminer une solution rationnelle positive. Les *Arithmétiques* se présentent alors comme une succession de problèmes de ce type — les dix livres réunissent 290 problèmes. Notons que certains de ces problèmes sont déterminés, d'autres indéterminés, mais que, pour ces derniers, Diophante ne donne qu'une seule solution ; il ne distingue pas nettement entre les deux genres. D'autre part, il n'explique pas ses méthodes de solution, et c'est sur ce silence que les historiens ont bâti les multiples interprétations de ses

méthodes. Or une lecture attentive montre que Diophante ne suit qu'un nombre limité de méthodes.

Les *Arithmétiques* de Diophante vont contribuer, à partir du IX^e siècle, à la constitution de l'analyse indéterminée rationnelle (al-Karajî) et de l'analyse indéterminée entière (al-Khæzin, etc.) ; et, une seconde fois, à ces deux mêmes chapitres, au XVII^e siècle, avec Bachet de Méziriac et Fermat.

Sur les mathématiques en France à partir du XVI^e siècle, les travaux de J. Itard constituent un ensemble d'études rarement égalées. Grâce à une lecture scrupuleuse et réfléchie des textes, qu'on lisait alors à peine, J. Itard est parvenu à jeter un jour nouveau sur bien des chapitres de cette histoire ; que l'on pense par exemple à ses travaux sur N. Chuquet, et surtout sur Bachet de Méziriac. Il a en particulier contribué à une compréhension plus profonde des travaux des grands mathématiciens du XVII^e siècle, et notamment de Descartes, Roberval et Fermat. Réparties entre différents articles et des notes à l'édition de la Correspondance de Mersenne, les études de première importance qu'il a rédigées sur ces mathématiciens se présentent souvent sous une forme extrêmement dense. Ainsi son court texte sur la *Géométrie* de Descartes remplace sans peine un volumineux ouvrage pour le lecteur qui possède bien les textes du philosophe. De même ses travaux sur Fermat constituent bien les différents chapitres d'un grand livre sur le mathématicien toulousain : on comprend à présent pourquoi J. Itard n'a pas été tenté par la rédaction d'un livre sur Fermat, lequel était déjà, en fait, contenu dans ces études.

En travaillant, comme il le faisait, conjointement sur les deux domaines, hellénistique d'une part, et moderne postérieur au XVI^e siècle d'autre part, J. Itard bénéficiait d'un double avantage : il pouvait suivre les commentaires des savants modernes sur un Archimède ou un Apollonius, par exemple, et être ainsi en mesure d'estimer la distance parcourue depuis les mathématiciens de l'Antiquité ; il pouvait également saisir aussi profondément que possible les «nouvelles mathématiques».

Si, entre les mathématiciens hellénistiques et ceux des XVI^e et XVII^e siècles, l'historien imagine un vide, il est naturellement tenté de le combler, soit en donnant des Grecs une lecture moderne, soit en réduisant les Modernes aux Grecs, soit enfin, et c'est le cas le plus fréquent, en adoptant une position quelque peu éclectique : moderniser ou réduire selon le cas. Un tel effort pour rétablir le lien entre ces deux époques apparaît, certes, inutile à celui qui sait qu'en fait ce vide n'existe point, et que l'histoire des mathématiques arabes et de leur influence au Moyen-Age et à la Renaissance suffit à rendre cohérente la démarche historique dans son ensemble. Ce n'est, bien sûr, pas moi qui reprocherai à J. Itard d'avoir ainsi quelque peu cédé parfois à cette tentation de

modernisation et de réduction : il était parfaitement conscient de la difficulté et n'a cessé de corriger les lacunes de ses propres études à mesure que progressait l'histoire d'une science qui, alors qu'il commençait son œuvre d'historien, était encore bien peu connue.

Pour terminer, je rappelle que l'homme que j'ai bien connu était un vrai savant : rigoureux, foncièrement honnête et modeste. Je vous remercie donc pour l'occasion qui m'est offerte de rendre un hommage amical et respectueux à sa mémoire.