Université Claude Bernard Lyon 1

Licence “Sciences et technologie”

Math VI-ALGEBRE

Unité d’enseignement Math I

Epreuve de mathématiques

CORRECTION PARTIEL 2012

_Il s’agit d’une correction rapide ! Désolé pour les typos, les accélérations de convergence de preuve, etc...

Probleme 1

(a) On a $\mathrm{Im}(u)^{\perp} \subset \ker(u^*)$ car si $x \in \mathrm{Im}(u)^{\perp}$, alors pour tout y, $< u^*(x), y >=< x, u(y) >= 0$. Donc, $u^*(x) = 0$ ce qui implique que $x \in \ker(u^*)$. La réciproque est claire pour une question de dimension.

(b) On sait que u est trigonalisable : il existe une base $B = (e_1, \cdots, e_n)$ telle que la matrice de u soit triangulaire supérieure. Si on la rend orthonormée par Gram-Schmidt, la matrice de passage sera triangulaire supérieure et donc la matrice de u dans la nouvelle base (orthonormée) sera triangulaire supérieure.

(c) On écrit u dans la base orthonormée précédente. On sait que sur la diagonale, on a les valeurs propres de u. Comme la base est orthonormée, la matrice de u^* est la transposée de la conjuguée de la matrice de u. On peut alors calculer la trace de u^*u et on trouve la somme des modules de valeurs propres plus des modules des éléments non diagonaux. D’où l’inégalité.

(d) On sait que u est normale si et seulement si elle est diagonalisable en BON. L’égalité est équivalente au fait que la matrice de u est diagonale. D’où le résultat.

(e) On a $\ker(u)^{\perp} = \mathrm{Im}(u^*)$, mais en regardant la matrice de u et de u^* dans la BON dans la quelle elle sont (simultanément) diagonales, on voit que u et u^* ont la même image (la somme directe des sous-espaces propres de valeur propre non nulle).

(f) On écrit $x = (x_i)$ dans la même base orthonormée et on trouve $C(u) = \{\frac{\sum_i \lambda_i |x_i^2|}{\sum_i |x_i^2|}\}$. Ce qui prouve l’assertion car tout réel positif est le module d’un complexe...

Probleme 2

(a) L’implication vient de l’identité de Bezout $ak + bn = 1$. La réciproque vient du fait que si $ak + bn = 1$, alors tout diviseur de a et de n doit diviser 1.

(b) La seule difficulté est de montrer que le produit de deux éléments premiers avec n est encore premier avec n. On peut le faire avec la question précédente, puisque le produit de deux inversibles est encore inversible.

(c) Les valeurs d’un caractère d’un groupe fini sont dans le groupe des complexe de module 1, puisque ce sont des racines de l’unité. Il suffit donc d’appliquer l’inégalité triangulaire et de voir qu’il y a $p - 1$ termes.

(d) C’est la définition de la transformée de Fourier !

(e) On se retrouve donc à calculer $< \hat{f}_\chi, \hat{f}_\chi >$. On utilise donc Parseval, et on se ramène à calculer $\sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*} \overline{\chi(x)}\chi(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*} 1 = p - 1$.

(f) C'est tout simplement la formule d'inversion de la série de Fourier.

(g) Le fait que a soit premier avec p fait que a est inversible modulo p et si a' est un représentant de son inverse modulo p, alors $z \mapsto z^a$ et $z \mapsto z^{a'}$ sont inverses l'un de l'autre sur l'ensemble des racines de l'unité. On revient à la définition de $G(\chi, ?)$ et on effectue la changement de variables $\omega \mapsto \omega^a$. On tombe sans encombres sur la formule désirée car χ est un caractère multiplicatif.

(h) On revient à la définition de $<\, ,\, >$, où ψ parcourt l'ensemble des caractères additifs de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Il y a parmi ces caractères : le caractère trivial, mais $G(\chi, ?)$ s'annule sur ce caractère puisque χ n'est pas trivial. Pour les autres caractères, ils sont de la forme φ_m avec m premier avec p. En écrivant $m = (a^{-1}b)a$ (car a inversible modulo p), et en utilisant le fait que $\chi(\overline{a^{-1}b})$ est de module 1, on trouve bien, avec la formule de la question précédente $(p-1)$ fois le même terme...

(i) Immédiat !