1 Maxima et paraboles

1. Dans une feuille de calcul du logiciel Maxima, entrer et valider une à une les lignes suivantes :

```
f(x):=a*x^2+b*x+c
solve([f(0)=-7,f(1)=-1,f(2)=9],[a,b,c])
```

2. Noter les résultats.
3. Comprendre la signification des commandes exécutées en se servant éventuellement de l'aide du logiciel.

Appel

2 Suite définie par une relation de récurrence

2.1 Une première suite

On définit une suite u par :

$$\begin{cases} u_0 = -7 \\ \text{Pour tout entier } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + 4n + 6 \end{cases}$$

1. Faire une feuille de tableur qui devra afficher les premiers termes de la suite. Puis faire une représentation graphique des premiers termes de la suite par un « nuage de points ».
2. Faire alors une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n.
3. Contrôler la conjecture à l'aide d'une colonne supplémentaire sur la feuille de tableur.

Appel

2.2 Une autre suite

Faire une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n avec la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + 3n^2 + 9n - 1 \end{cases}$$

Appel

3 DM pour ...

1. Écrire les réponses apportées au paragraphe 1 (paraboles).
2. Écrire les conjectures faites pour chacune des deux suites.
3. Démontrer ces conjectures.

Corrigé

1 Paraboles et Maxima

```
f(x):=a*x^2+b*x+c;
```

On définit ainsi une fonction f par son expression $f(x) = ax^2 + bx + c$.

```
solve([f(0)=-7,f(1)=-1,f(2)=9],[a,b,c]);
```

On commande ainsi la résolution du système linéaire d'inconnue $(a; b; c)$:

$$\begin{cases} c = -7 \\ a + b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 9 \end{cases}$$

La parabole passant par les points $A\,(0; -7)$, $B\,(1; -1)$ et $C\,(2; 9)$, représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 7$$

2 Conjectures avec le tableur

2.1 $u_0 = -7$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n + 4n + 6$

1. Les formules de la feuille de calcul :

	A	B	C	D	E
1	Indices n	Termes u_n			
2	0	-7			
3	1	=B2+4*A2+6			
4	2	=B3+4*A3+6			
5	3	=B4+4*A4+6			
$\vdots$	$\vdots$				

Les premiers résultats sont les suivants :

	A	B	C	D	E
1	Indices n	Termes u_n			
2	0	-7			
3	1	-1			
4	2	9			
5	3	23			
6	4	41			

2. Il semble que les points obtenus soient placés sur une parabole. Cela permet de conjecturer une expression de la forme $u_n = an^2 + bn + c$ où a, b et c restent à déterminer.
Les résultats obtenus dans la partie 1 (Maxima) permettent de faire la conjecture suivante :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 2n^2 + 4n - 7$$

3. Pour tenter de renforcer la plausibilité de cette formule, on peut complèter la feuille de tableur de la façon suivante :

	A	B	C	D	E
1	Indices n	Termes u_n	Confirmation ?		
2	0	-7	=2*A2^2+4*A2−7		
3	1	=B2+4*A2+6	=2*A3^2+4*A3−7		
4	2	=B3+4*A3+6	=2*A4^2+4*A4−7		
5	3	=B4+4*A4+6	=2*A5^2+4*A5−7		
$\vdots$	$\vdots$				

Tous les résultats, même sur une longue colonne, coïncident.

2.2 Autre présentation de recherche pour la suite $u_0 = -7$ et pour $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 4n + 6$

Ayant observé sur le tableur que les points $(n; u_n)$ semblaient se trouver sur une parabole, on conjecture une expression de la forme $u_n = an^2 + bn + c$.
Posons pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = an^2 + bn + c$.
On cherche à quelle condition sur a, b, c on aura $v_{n+1} - v_n = 4n + 6$.
On a pour $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = 2an + a + b$.
Il suffit donc de poser $a = 2$ et $b = 4$ pour avoir la relation de récurrence définissant u.
Et une suite v définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 2n^2 + 4n + c$ coïncidera avec u si on choisit c tel que $v_0 = u_0$, c'est à dire $c = -7$.

2.3 $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 3n^2 + 9n - 1$

Par comparaison avec ce que l'on a observé pour la première suite, on peut espérer obtenir une expression de u_n de la forme
$$u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$$
On commence par les calculs des premiers termes de la suite dans une feuille de tableur. On obtient :
$$u_0 = 1;\ u_1 = 0;\ u_2 = 11;\ u_3 = 40$$
On cherche alors à résoudre le système d'inconnue $(a; b; c; d)$:
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & d & = & 1 \\ a & + & b & + & c & + & 1 & = & 0 \\ 8a & + & 4b & + & 2c & + & 1 & = & 11 \\ 27a & + & 9b & + & 3c & + & 1 & = & 40 \end{array}\right.$$
Dans Maxima :

```
f(x):=a*x^3+b*x^2+c*x+d;
solve([f(0)=1,f(1)=0,f(2)=11,f(3)=40], [a,b,c,d]);
```

La réponse ne se fait pas attendre :
$$[[a = 1, b = 3, c = -5, d = 1]]$$
On conjecture donc :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^3 + 3n^2 - 5n + 1$$
Un contrôle dans la feuille de tableur semble confirmer cette expression.

2.4 Autre présentation de recherche

Sur le modèle précédent, on cherche u sous la forme $u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$.
Posons pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = an^3 + bn^2 + cn + d$.
Avec Maxima :

```
v(n):=a*n^3+b*n^2+c*n+d;
ratsimp(v(n+1)-v(n));
```

Maxima répond : $3\,a\,n^2 + (2\,b + 3\,a)\ n + c + b + a$
En posant $a = 1$, $b = 3$, $c = -5$, on garantit donc la relation de récurrence définissant u.
En posant de plus $d = 1$, on aura $v_0 = 1$.
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^3 + 3n^2 - 5n + 1$$

3 Démonstrations

3.1 $u_0 = -7$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n + 4n + 6$

Posons pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 2n^2 + 4n - 7$.
Dans Maxima :

```
v(n):=2*n^2+4*n-7;
expand(v(n+1)-v(n));
```

Réponse de Maxima, facile à vérifier avec papier et crayon : $4\,n + 6$
Pour la suite v, nous avons donc :

$$\begin{cases} v_0 = -7 \\ v_{n+1} = v_n + 4\,n + 6 \end{cases}$$

La suite v est donc égale à la suite u.

Démonstration.

1. Amorce.
   Nous avons $u_0 = v_0$.
2. Hérédité.
   Soit p un entier pour lequel on aurait $u_p = v_p$.
   Alors
   $$\begin{aligned} u_{p+1} &= u_p + 4p + 6 \\ &= v_p + 4p + 6 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= v_{p+1} \end{aligned}$$
3. Conclusion.
   Les deux étapes précédentes et le principe de récurrence nous permettent ainsi l'affirmation :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n$$

3.2 $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3n^2 + 9n - 1$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = n^3 + 3n^2 - 5n + 1$$

Avec Maxima :

```
v(n):=n^3+3*n^2-5*n+1;
ratsimp(v(n+1)-v(n));
```

on obtient : $3 * n^2 + 9 * n - 1$
Ce qui signifie (vérification à la main élémentaire) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + 3n^2 + 9n - 1$$

Pour la suite v, on a donc

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + 3n^2 + 9n - 1 \end{cases}$$

ce qui nous permet d'établir, comme dans la rédaction précédente, que les suites u et v sont égales.

4 $u_{n+1} = u_n + P(n)$ où P est un polynôme

L'utilisation d'un logiciel de calcul formel permet d'envisager une généralisation.
Maxima nous débarrassant des ennuis techniques, qui sait si l'on ne redonnera pas à quelques uns le goût du calcul ?

On considère par exemple la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_{n+1} = u_n + a_4\, n^4 + a_3\, n^3 + a_2\, n^2 + a_1\, n + a_0$$

Soit v de la forme $v(n) = b_0 + b_1\, n + b_2\, n^2 + b_3\, n^3 + b_4\, n^4 + b_5\, n^5$.
Avec Maxima :

```
v(n):=b[0]+b[1]*n+b[2]*n^2+b[3]*n^3+b[4]*n^4+b[5]*n^5;
ratsimp(v(n+1)-v(n));
```

on obtient :

$$5\, b_5\, n^4 + (10\, b_5 + 4\, b_4)\; n^3 + (10\, b_5 + 6\, b_4 + 3\, b_3)\; n^2 + (5\, b_5 + 4\, b_4 + 3\, b_3 + 2\, b_2)\; n + b_5 + b_4 + b_3 + b_2 + b_1$$

puis

```
solve([5*b[5]=a[4],10*b[5]+4*b[4]=a[3],10*b[5]+6*b[4]+3*b[3]=a[2],5*b[5]+4*b[4]+3*b[3]
 +2*b[2]=a[1],b[5]+b[4]+b[3]+b[2]+b[1]=a[0]], [b[1],b[2],b[3],b[4],b[5]]);
```

donne :

$$[[b_1 = -\frac{a_4 - 5\, a_2 + 15\, a_1 - 30\, a_0}{30}, b_2 = \frac{a_3 - 2\, a_2 + 2\, a_1}{4}, b_3 = \frac{2\, a_4 - 3\, a_3 + 2\, a_2}{6}, b_4 = -\frac{2\, a_4 - a_3}{4}, b_5 = \frac{a_4}{5}]]$$

Reste à fixer b_0 pour garantir $v_0 = u_0$.