Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2012-2013
Algèbre linéaire - Mercredi 12 juin 2013

1 Espaces vectoriels

Exercice 1. ***Sous-espaces vectoriels et combinaisons linéaires.***

1. *Montrer que l'intersection d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel.*
2. *La réunion de deux (ou plus) sous-espaces vectoriels de E est-elle un sous-espace vectoriel ?*
3. *Soit A un sous-ensemble d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.*
   Montrer que $Vect(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme :
   $$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r \quad \text{avec } r \in \mathbf{N},\ x_1, \ldots, x_r \in A,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{K}.$$
4. *Soient F et F' deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Montrer que*
   $$F + F' = Vect(F \cup F').$$

Exercice 2. ***Plans.***

Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les sous-ensembles suivants :
$$V = \big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + y - z = 0\big\} \text{ et } W = \{(a - b, a + b, a - 3b) \ : \ a, b \in \mathbf{R}\}.$$

1. *Justifier que V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.*
2. *Déterminer $V \cap W$ puis $V + W$.*

Exercice 3. ***Sous-espaces supplémentaires (1).***

Dans chacun des cas, répondre aux questions suivantes

(a) Les sous-ensembles V et W sont-ils des sous-espaces-vectoriels de E ?

(b) A-t-on $V + W = E$?

(c) Les sous-espaces V et W sont-ils en somme directe ?

(d) A-t-on $V \oplus W = E$?

1. *$E = \mathbf{K}[X]$, V est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 5, W est l'ensemble des polynômes nul ou de degré supérieur ou égal à 6.*
2. *E est l'ensemble des vecteurs de l'espace (usuel : à trois dimensions), V est un plan vectoriel, W est une droite vectorielle.*
3. *$E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, V (resp. W) est l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires).*
4. *$E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices réelles carrées de taille n, V (resp. W) est l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques).*
5. *$E = \mathbf{R}^I$ est l'ensemble des fonctions d'un intervalle I dans $\mathbf{R}$, V (resp. W) est l'ensemble des fonctions positives (resp. négatives) ou nulles.*
6. *E est l'ensemble des suites réelles convergentes, V (resp. W) est l'ensemble des suites admettant pour limite 0 (resp. des suites constantes).*

7. $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ *est l'ensemble des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur* $\mathbf{R}$*,* V *est l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à* n *(*n *entier naturel) et* W *est l'ensemble des fonctions de* E *s'annulant en* $x_0,\ x_1, \ldots, x_n$ *(réels).*
8. E *est l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel* F*,* u *est un élément de* E*,*

$$V = \{v \in E \,:\, v \circ u = u \circ v\} \quad \textit{et} \quad W = \{v \in E \,:\, v \circ u = 0_E\}.$$

Exercice 4. ***Sous-espaces supplémentaires (2).***

Déterminer un sous-espace supplémentaire de V *dans* E *dans les cas suivants :*

1. $E = \mathbf{R}_5[X]$*, et* $V = \{P \in E : X^2 + 3 \textit{ divise } P\}$
2. $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ *et* $V = \{f \in E \,:\, f(0) = 0\}$
3. $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ *et* $V = \left\{f \in E \,:\, \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$.
4. $E = \mathbf{R}^{[0,1]}$ *et* $V = \{f \in E \,:\, f(0) = f(1) = 0\}$

Exercice 5. ***Bases.***

1. *Rappeler ce qu'est la base canonique de l'espace vectoriel* $E = \mathbf{K}_n[X]$ *des polynômes de degré au plus* n*. Quelle est la dimension de* E *?*
   Pour la suite, on considère un polynôme P *de degré* n *à coefficients réels.*
2. *Démontrer que la famille* $\left(P, P', P^{(2)}, \ldots, P^{(n)}\right)$ *est une base de* $\mathbf{R}_n[X]$.
3. *(Plus difficile) Démontrer l'équivalence suivante :*

$$\left(P, XP', X^2P^{(2)}, \ldots, X^nP^{(n)}\right) \textit{ est une base de } \mathbf{R}_n[X] \iff \textit{tous les coefficients de } P \textit{ sont non nuls.}$$

2 Applications linéaires

Exercice 6. ***La conjugaison complexe.***

1. *Vérifier que* $\mathbf{C}$ *est un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?*
   Mêmes questions en remplaçant $\mathbf{R}$ *par* $\mathbf{C}$ *puis par* $\mathbf{Q}$.
2. *Vérifier que la conjugaison complexe* $\mathbf{C} \to \mathbf{C} \,:\, z \mapsto \overline{z}$ *est* $\mathbf{R}$*-linéaire,* $\mathbf{Q}$*-linéaire mais pas* $\mathbf{C}$*-linéaire.*

Exercice 7. ***Cas particulier du lemme des noyaux.***

Soit u *un endomorphisme d'un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* E *tel que* $u^2 + u - 6id = 0$ *dans* $\mathcal{L}(E)$*.*
Démontrer l'égalité $E = \ker(u - 2id) \oplus \ker(u + 3id)$*.*

Exercice 8. ***Interpolation polynomiale.***

On considère un entier naturel n *et une suite* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *de nombres réels. L'application* Φ *est définie par*

$$\Phi \,:\, \mathbf{R}_n[X] \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1} \,:\, P \longmapsto \left(P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)\right).$$

1. *Étudier l'injectivité de* Φ.
2. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* Φ *soit surjective. Interpréter.*

Exercice 9. ***Endomorphisme nilpotent.***

Soit f appartenant à $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$ (f^k désigne ici $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k}$).

Montrer que, pour tout vecteur v n'appartenant pas à $\ker f^2$, la famille $\big(v, f(v), f^2(v)\big)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 10. ***Rang et inégalités.***

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension finie n. On considère deux endomorphismes f et g de E.

1. *On suppose que $f \circ g = 0$. Établir une majoration de $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.*
2. *On suppose qu'il existe une combinaison linéaire de f et g (dans $\mathcal{L}(E)$) qui soit un isomorphisme. Démontrer que $E = \operatorname{im} f + \operatorname{im} g$. En déduire une minoration de $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.*

Exercice 11. ***Homothéties - Projecteurs - Symétries.***

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel (sur un corps de caractéristique différente de 2).

1. *Un endomorphisme h de E est appelé* homothétie *s'il existe un scalaire λ tel que $h = \lambda id$ dans $\mathcal{L}(E)$.*
   Montrer que h est une homothétie si et seulement si, pour tout v dans E, la famille $(v, h(v))$ est liée.
2. *Un endomorphisme p de E est appelé* projecteur *s'il vérifie $p^2 (= p \circ p) = p$ dans $\mathcal{L}(E)$.*
   (a) *Donner un exemple de projecteur sur $\mathbf{R}^2$, sur $\mathbf{R}^3$.*
   (b) *Démontrer que p est un projecteur si et seulement si $E = \ker p \oplus \ker(p - id)$.*
   (c) *Démontrer que p est un projecteur si et seulement si $\operatorname{im} p = \ker(p - id)$.*
3. *Un endomorphisme s de E est appellé* symétrie *s'il vérifie $s^2 (= s \circ s) = id$ dans $\mathcal{L}(E)$.*
   (a) *Démontrer que s est une symétrie si et seulement si l'endomorphisme $p = \frac{1}{2}(s + id)$ est un projecteur.*
   (b) *Démontrer que s est une symétrie si et seulement si $E = \ker(s + id) \oplus \ker(s - id)$.*