Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2012-2013
Algèbre linéaire - Résumé de résultats - Mercredi 12 juin 2013

Je renvoie aux livres [Mon06], [Gri02] et [Gou94] pour plus de détails et de démonstrations (en particulier la définition de (sous)-espace vectoriel).

On considère un corps (commutatif) $\mathbf{K}$ dont les éléments seront parfois appelés des *scalaires*.

1 Algèbre linéaire «statique» : espaces vectoriels

Une liste de définitions/vocabulaires :

1. L'intersection d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.
2. Si A est un sous-ensemble quelconque de E, alors $Vect(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subseteq F}} F$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A, c'est le *sous-espace vectoriel engendré* par A.
3. Si $F_1, \dots, F_r$ sont des sous-espaces vectoriels de E, la somme $F_1 + \ldots + F_r$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $v_1 + \cdots + v_r$ avec v_k dans F_k.

Définition 1.1 (**somme directe, supplémentaires**).
Soient E un sous-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E.

1. *On dit que $F_1, \dots, F_r$ sont en* somme directe *si $F_k \cap \left(F_1 + \cdots + \widehat{F_k} + \cdots + F_r\right) = 0_E$ pour tout indice $k = 1, \dots, r$.*
   Leur somme peut alors être notée $F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$.
2. *Deux sous-espaces vectoriels F et F' sont* supplémentaires *dans E si $E = F \oplus F'$ (c'est-à-dire $F + F' = E$ et $F \cap F' = \{0\}$).*

Définition 1.2. *S'il existe un ensemble fini A tel que $Vect(A) = E$, on dit que E est de* dimension finie *et dans ce cas, le nombre minimal d'éléments d'une telle partie A est la* dimension *de E.*

Propriété 1.1. *Si F et F' sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel :*

$$\dim(F + F') = \dim(F) + \dim(F') - \dim(F \cap F').$$

Définition 1.3 (**famille libre, génératrice, base, coordonnées, rang**).
Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{v_i\}_{i\in I}$ une famille (indexée sur l'ensemble I) de vecteurs de E.

1. *La famille $\mathcal{F}$ est* libre *si «toute combinaison linéaire finie et nulle d'éléments de $\mathcal{F}$ est triviale» : pour tout entier non nul r,*

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_{i_k} = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0_{\mathbf{K}}.$$

   (De manière équivalente, la famille $\{Vect(v_i)\}_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels est en somme directe.)

2. *La famille $\mathcal{F}$ est* génératrice *si «tout élément de E est une combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathcal{F}$» : pour tout v dans E, il existe r, $i_1, \dots, i_r$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que*

$$v = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_{i_k} = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r.$$

   (De manière équivalente, E est la somme vectorielle de la famille $\{Vect(v_i)\}_{i\in I}$.)

3. *La famille $\mathcal{F}$ est une* base *de E si «tout élément non nul de E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathcal{F}$» : pour tout v non nul dans E, il existe r, $i_1, \ldots, i_r$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ uniques tels que*
$$v = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_{i_k} = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r.$$
(De manière équivalente, $E = \bigoplus_{i \in I} Vect(v_i)$.)
4. *Si $Vect(\mathcal{F})$ est de dimension finie, alors le* rang *de la famille $\mathcal{F}$ est $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim Vect(\mathcal{F})$.*
5. *Si E est de dimension finie et $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de E, alors l'unique décomposition $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ définit les* coordonnées *$(x_1, \ldots, x_n)$ de v dans la base $\mathcal{B}$.*

Propriété 1.2. *Soit E un espace vectoriel (non trivial).*

1. *Il existe une base de E.*
2. *Si une base est finie, toute autre base est de même cardinal (égal à $\dim(E)$).*
3. *(a) (théorème de la base incomplète) Toute famille libre peut être complétée en une base.*
   (b) (existence d'un supplémentaire) Tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.
4. *De toute famille génératrice, on peut extraire une base.*
5. *Si E est de dimension finie n et $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est une famille de E, alors on a :*
$$\mathcal{F} \text{ est libre} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une base} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est génératrice.}$$

2 Algèbre linéaire «dynamique» : applications linéaires

Définition 2.1. *Une application $u : E \longrightarrow F$ entre deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels E et F est* linéaire *($\mathbf{K}$-linéaire précisément) si*
$$u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y) \quad \text{pour tous } x, y \in E,\ \lambda \in \mathbf{K}.$$
L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E; F)$.

Une application linéaire u de $\mathcal{L}(E; F)$ est complètement déterminée par les (coordonnées dans une base de F des) images des vecteurs d'une base de E.
Ces données constituent la *matrice* de u dans les bases concernées.

Propriété 2.1. *Soit u appartenant à $\mathcal{L}(E; F)$*

1. *L'image (directe) $u(V) = \{u(x) : x \in E\}$ d'un sous-espace vectoriel V de E est un sous-espace vectoriel de F.*
2. *L'image réciproque $u^{-1}(W) = \{x \in E : u(x) \in W\}$ d'un sous-espace vectoriel W de F est un sous-espace vectoriel de E.*
3. *(le «miracle») Si u est bijective, l'application réciproque $u^{-1} : F \longrightarrow E$ est linéaire.*

Cas particuliers :

Définition 2.2 (image, rang, noyau).

1. *L'*image *de u est le sous-espace vectoriel $\mathrm{im}\, u = u(E)$ de F.*
2. *Le* rang *de u est la dimension (si finie) de cette image : $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{im}\, u)$.*
3. *Le* noyau *de u est le sous-espace vectoriel $\ker u = u^{-1}(\{0_F\})$ de E.*

Théorème 1 (du rang). *Soit u une application linéaire de E dans F avec E* ***de dimension finie****. Alors*
$$\dim(E) = \mathrm{rg}(u) + \dim\ker(u).$$

Schéma récapitulatif des conditions d'injectivité, de surjectivité, de bijectivité :
Attention aux conditions qui ne sont valables qu'en dimension finie.
Les conditions sur le déterminant et les mineurs ne sont pas indiquées.

$u \in \mathcal{L}(E;F)$	image d'une base de E	image/rang	noyau
injective	famille libre de F	$\mathrm{rg}(u) = \dim(E)$	$\ker(u) = \{0_E\}$
surjective	famille génératrice de F	$\mathrm{im}(u) = F$ $(\Leftrightarrow \mathrm{rg}(u) = \dim(F))$	$\dim\ker(u) = \dim(E) - \dim(F)$
bijective	base de F	(2 sur 3) $\left\{\begin{array}{l}\ker(u) = \{0_E\}\\ \mathrm{im}(u) = F\ (\Leftrightarrow \mathrm{rg}(u) = \dim(F))\\ \dim(E) = \dim(F)\end{array}\right.$	

Nomenclature des morphismes d'espaces vectoriels :

$u \in \mathcal{L}(E;F)$	E, F quelconques	$E = F$
quelconque	application linéaire	**endomorphisme**
bijective $\left(\begin{array}{c}\Leftrightarrow \text{injective}\\ \Leftrightarrow \text{surjective}\\ \text{en dim finie}\end{array}\right)$	**isomorphisme**	**automorphisme**

L'ensemble $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E;E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E est (avec la conjugaison) une $\mathbf{K}$-algèbre (non commutative si $\dim(E) \geqslant 2$).
L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E forme (pour la conjugaison) le *groupe linéaire* $GL(E)$ dont l'élément neutre est id_E.

Références

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre.* Les maths en tête. Ellipses, Paris, 1994.

[Gri02] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire.* Cépaduès-Éditions, Toulouse, 2002.

[Mon06] Jean-Marie Monier. *Algèbre MPSI, Cours, méthodes et exercices corrigés, 4^e édition.* J'intègre. Dunod, Paris, 2006.